O różniczkowalności zespolonej oraz pewnych jej konsekwencjach w hydrodynamice

Funkcje różniczkowalne w sensie podanym obok są częściej nazywane analitycznymi lub holomorficznymi. Stanowią one szerszą klasę niż wielomiany, a węższą niż wszystkie w ogóle funkcje ciągłe zmiennej zespolonej z. Jednym z warunków równoważnych na to, żeby funkcja $f(z)$ była analityczna w punkcie z^0 jest, by rozwijała się w tym punkcie na szereg potęgowy postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z^0)^n.$$

W naszych rozważaniach będziemy się posługiwać funkcjami zespolonymi jednej zmiennej z. Nietrudno zauważyć, że określenie funkcji zespolonej $f\colon A \to C$ jest równoważne określeniu dwóch funkcji rzeczywistych $f_1\colon A \to R$ i $f_2\colon A \to R$ (przyjmujemy $z = x+iy$; $f(z) = f_1(z)+if_2(z)$).
Załóżmy, że funkcja $f = f_1+if_2$ jest skończona na pewnym otoczeniu punktu $z^0 = x^0+iy^0 \in C$. Mamy wówczas następującą definicję:

Definicja 1. Funkcję $f = f_1+if_2$ nazywamy *różniczkowalną* w punkcie z^0 *w sensie zespolonym*, jeśli funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne jako funkcje (x, y) w punkcie (x^0, y^0) oraz spełniony jest w punkcie z^0 następujący warunek:

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0, \text{ gdzie } \bar z = x-iy \text{ oraz } \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Nietrudno zauważyć, że warunek (1) jest równoważny następującym równościom:

$$(1a)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Są to tzw. *związki Cauchy-Riemanna.*
Zauważmy, że jeżeli funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne w punkcie (x^0, y^0), to przekształcenie $\omega = f(z)$ można przybliżyć z dokładnością do wyrażeń małych wyższego rzędu względem $z-z^0$ przekształceniem: $f_1-f_1^0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(y-y^0)$, $f_2-f_2^0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(y-y^0)$,
co można zapisać w postaci:

$$(2)\qquad \omega-\omega^0 = \frac{\partial f}{\partial z}(z-z^0)+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(\bar z-\bar z^0).$$

Jeżeli ponadto funkcja f jest różniczkowalna w sensie zespolonym, to $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ oraz istnieje pochodna $f'(z^0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z^0)$. Wówczas przekształcenie (2) przybiera postać:

$$(2a)\qquad \omega-\omega^0 = f'(z^0)\cdot(z-z^0).$$

Zauważmy, że gdy $f'(z^0) \neq 0$, jest to wydłużenie wektora $z-z^0$ przez skalar $|f'(z^0)|$ wraz z obrotem o kąt $\arg f'(z^0)$. Odwzorowanie (2a) ma następujące geometryczne własności:
a) zachowuje kąty, b) kwadraty przekształca na kwadraty, c) okręgi przekształca na okręgi, d) zachowuje orientację dowolnego trójkąta.

Definicja 2. Przekształcenie f nazywamy *konforemnym w punkcie* $z^0 \in C$, jeśli jest przekształceniem różniczkowalnym w sensie zespolonym w punkcie z^0 oraz $f'(z^0) \neq 0$. Przekształcenie $f\colon A \to C$ nazywamy *konforemnym na obszarze* A, jeśli jest różnowartościowe i konforemne w każdym punkcie obszaru A.

Rozpatrzmy obecnie przepływ jednorodnej cieczy nielepkiej taki, że wektory prędkości v tego przepływu nie zależą od czasu i nie zmieniają się wzdłuż żadnej z prostych prostopadłych do ustalonej płaszczyzny.
Takie przepływy nazywamy ustalonymi *przepływami płaskimi.* Są one opisane przez wektorowe pole prędkości

$$(3)\qquad v = v_1(x, y)+iv_2(x, y).$$

Załóżmy, że w pewnym otoczeniu punktu z^0 funkcje v_1 i v_2 mają ciągłe pochodne cząstkowe oraz, że w tym otoczeniu pole (3) jest *solenoidalne* (*bezźródłowe*), tzn.

$$(4)\qquad \operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

oraz *bezwirowe*, tzn.

$$(5)\qquad \operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

Wprowadźmy pewną funkcję φ taką, że

$$(6)\qquad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Spełnimy wtedy warunek (5) tożsamościowo. Funkcję nazywamy *potencjałem* pola wektorowego v.
Jeżeli wprowadzimy ponadto taką funkcję ψ, że

$$(7)\qquad v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

to spełnimy również warunek (4). Jest to tak zwana funkcja prądu. Jej wykres to krzywa styczna do pola wektorowego v.
Zauważmy, że na mocy (6) i (7) zachodzi następująca zależność:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Mgr Włodzimierz KUZAK

Z tego wzoru wynika, że każda krzywa φ = const przecina się pod kątem prostym z dowolną krzywą ψ = const. Możemy zatem zbudować funkcję zespoloną

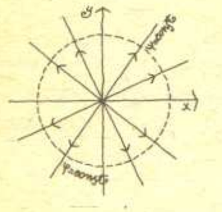
(8) $$f = \varphi + i\psi$$

zwaną *zespolonym potencjałem* pola $\boldsymbol{v}$. Na mocy związków (6) i (7) mamy:

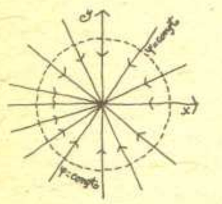
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Na mocy (1a) widać, że są to warunki Cauchy-Riemanna zespolonej różniczkowalności funkcji $f = \varphi + i\psi$ w punkcie z^0. Tak więc na każdą różniczkowalną w sensie zespolonym funkcję f można patrzeć jak na zespolony potencjał ustalonego, potencjalnego i solenoidalnego przepływu płaskiego nielepkiej cieczy. Ponadto ponieważ pochodna $f'(z)$ nie zależy od kierunku, więc można ją obliczać na przykład w kierunku osi Ox. Otrzymamy stąd:

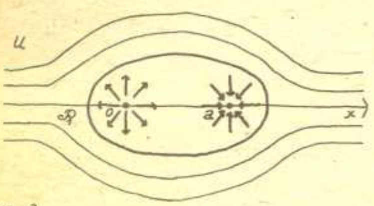
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_1 - iv_2 = \bar{v}.$$



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Rozpatrzmy obecnie kilka przykładowych przepływów, jakie możemy opisać za pomocą potencjałów zespolonych.

I Płaski Przepływ Równoległy:

Nietrudno zauważyć, że potencjał $f(z) = Uz$ opisuje przepływ równoległy do osi Ox ze stałą prędkością U.

II Źródło i Upust

Rozpatrzmy zespolony potencjał prędkości $f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z$, gdzie Q = const.

Z drugiej strony, zapisując $z = re^{i\theta}$ otrzymamy: $f(z) = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \varphi + i\psi$.

Zatem $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$; $\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r$. Ponadto $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{Q}{2\pi z} = \frac{Q(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)} = v_1 - iv_2$.

Stąd $v_1 = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$; $v_2 = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$.

Stała Q określa wydatek cieczy. Dla $Q > 0$ mamy do czynienia z wypływem cieczy ze źródła punktowego (rys. 1), a dla $Q < 0$ powyższy potencjał opisuje upust cieczy (rys. 2).

III Opływ Elipsy

Rozpatrzmy przepływ płaski o stałej prędkości U w kierunku osi Ox w superpozycji ze źródłem w punkcie (0, 0) o wydatku $Q > 0$ oraz z upustem o intensywności $-Q$ położonym w punkcie $(a, 0)$, $a > 0$ (rys 3). Zatem naszemu przepływowi odpowiada potencjał

(9) $$f(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z}{z-a}.$$

Spróbujmy wyznaczyć pole prędkości cieczy:

(10) $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = v_1 - iv_2 = U + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-a}\right) = U + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x-a+iy}\right)$$

Okazuje się, że na osi Ox istnieją 2 punkty, w których składowa v_1 pola prędkości znika. Są to tak zwane *punkty spiętrzenia* p_1, p_2 (rys. 3). Aby wyznaczyć ich położenie, należy we wzorze (10) położyć $v_1 = 0$, $y = 0$. Otrzymamy stąd następujące zależności:

$$x_{p_1} = \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Q}{\pi a U}}\right), \quad x_{p_2} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{\pi a U}}\right).$$

Opisaliśmy w ten sposób opływ elipsy o ogniskach w punktach (0,0) i $(a, 0)$. Jeżeli teraz we wzorze (9) na potencjał będziemy przechodzić do granicy $(a \to 0)$ oraz będziemy zwiększać Q $(Q \to \infty)$ tak, by razem $aQ = m$ = const, to na mocy (9) otrzymamy

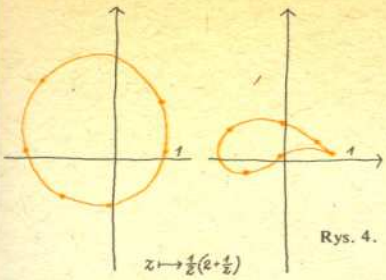
$$f(z) = Uz + \lim_{a\to 0}\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = Uz + \lim_{a\to 0}\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots\right).$$

Ponieważ ma być $aQ = m$, to

(11) $$f(z) = Uz + \frac{m}{2\pi z} = \varphi + i\psi.$$

Stąd mamy następujące równości: $\varphi = \frac{mx}{2\pi(x^2+y^2)} + Ux$; $\psi = \frac{my}{2\pi(x^2+y^2)} + Uy$.

Potencjał (11) opisuje opływ cieczą okręgu (co w przestrzeni trójwymiarowej odpowiada opływowi walca). W tym miejscu można już wykorzystać własności odwzorowań konforemnych. Wiadomo, że zachowują one kąty, a więc w szczególności zachowają prostopadłość linii prądu ψ = const z liniami potencjału φ = const. Zatem jeżeli chcemy opisać opływ pewnego profilu płaskiego ustalonym strumieniem nielepkiej cieczy, to wystarczy znaleźć (o ile to możliwe) odwzorowanie konforemne zewnętrza koła na zewnętrze rozpatrywanego profilu.



Rys. 4.

Znalezione odwzorowanie w złożeniu z potencjałem opływu koła (11) da nam w efekcie potencjał opisujący opływ naszego profilu. Fakt ten ma niezmiernie szerokie znaczenie praktyczne. Przykładowo można w ten sposób opisać opływ profilu skrzydła lotniczego (w tym przypadku powietrze traktujemy jako ciecz nielepką, co z punktu widzenia jego podstawowych własności hydrodynamicznych jest dopuszczalne). Do tego celu wykorzystuje się fakt, że *funkcja Żukowskiego* $F(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ przekształca konforemnie zewnętrze koła przechodzącego przez punkt $(1, 0)$ i zawierającego wewnątrz punkt $(-1, 0)$ na zewnętrze profilu lotniczego (rys. 4). Widać więc, że w wielu przypadkach trudność znalezienia potencjału zespolonego dla opływu dowolnego profilu można zastąpić problemem poszukiwania odpowiedniego odwzorowania konforemnego.

Ta pierwsza i ta nasza

Dla uzmysłowienia sobie istnienia wielu metodologii najlepiej zwrócić uwagę na dwie najpopularniejsze: empiryczną i dedukcyjną (od razu zastrzeżenie: nie należy uważać, że metodologia dedukcyjna nie stosuje doświadczeń, a empiryczna rozumowań).

TA PIERWSZA

Metodologia empiryczna jest tak stara jak wyodrębniony gatunek *Homo sapiens* — jest to broń, którą nasi przodkowie pokonali silniejszych, a nawet mających większe mózgi neandertalczyków. Aby tę metodologię zobaczyć „w działaniu", weźmy do ręki typowe dzieło naukowe sformułowane w myśl jej zasad i stosowane do chwili obecnej — książkę kucharską. Znajdujemy w niej przepisy na uzyskanie określonych efektów na polu gastronomicznym. Każdy z nich można by nazwać (w naszym, z innej metodologii wziętym języku) twierdzeniem o konstrukcji typu: jeżeli wykonasz to i tamto, uzyskasz taki to a taki efekt. Oczywiście nie ma możliwości i nie wyczuwa się potrzeby dowodzenia prawdziwości takich twierdzeń. Wierzymy, że są one prawdziwe i przeważnie tak jest, gdyż ich lista uformowała się przez eliminację (spośród wielu proponowanych) złych, czyli nie sprawdzających się w praktyce przepisów — stąd nazwa tej metodologii.
Użyte wyżej słowo *wiara* jest szczególnie znaczące. Wobec braku możliwości wielokrotnego (w sensie statystyki, a nie potocznym) sprawdzenia przepisu (bo ile w końcu pieczemy np. pierników bakaliowych przez całe życie) głównym motywem podjęcia ryzyka (zmarnowania kilku jajek, kostki masła etc.) jest zaufanie, że głosiciele takich przepisów „wiedzą". I stąd o uczonych z czasów, gdy metodologia empiryczna nie miała konkurencji, mówimy: kapłani egipscy, kapłani chaldejscy itd. Owo zaś związane z nazwami „kapłan", „religia" pojęcie mitu też nie jest przypadkiem — przepis, na to by mógł być utrwalony w świadomości dość prymitywnych wówczas i złożonych kompletnie z analfabetów mas, musiał być obudowany ułatwiającą zapamiętanie fabułą, częstokroć był wierszowany, wyposażony w melodię itp. (np. mit o Ozyrysie, którego obrzędy zmuszały do należytej uprawy roli; potem już bez tego praktycznego znaczenia powtarzany w greckiej historii Persefony).
I ta właśnie metodologia królowała niepodzielnie na Ziemi do ok. 1000 r. p.n.e. Później dzieląc swe władanie z metodologią dedukcyjną wycofywała się na tereny o młodszej cywilizacji (np. umieszczony w „Kalevali" przepis na produkcję piwa), ale nigdy nie została całkowicie usunięta, o czym świadczy przytoczona książka kucharska, a o wiele dobitniej rozmaite instrukcje obsługi, gdzie mamy do dyspozycji przepis dla nas niesprawdzalny, choć łatwy do uzasadnienia dla jego autorów (co w przypadku książki kucharskiej nie ma miejsca).
Wiek XX przez poszerzenie obszarów ludzkiej penetracji spowodował szczególnie korzystne warunki dla renesansu pierwszej ludzkiej metodologii. Zaczęliśmy nie nadążać, mamy trudności z ogarnięciem całości odsłoniętego obszaru rzeczywistości. A więc coraz częściej częstujemy (i jesteśmy częstowani) przepisami dotyczącymi nie opanowanych przez innych (czy przez nas) dziedzin.
Nowoczesna maszyna — komputer — oferuje nam rozumowania, których powtórzyć nie bylibyśmy w stanie (np. rozwiązanie problemu czterech barw) wieńcząc ostatecznie restaurację odsuwanej w obszar magii przez 3 tysiące lat metodologii empirycznej. Mechanika kwantowa jest dlatego dobra, że jej przepisy dają przewidywania zgodne z doświadczeniem. Tak jak przepis na piernik bakaliowy. Przestajemy pytać „dlaczego?", mówimy „tak jest, i już".
A nasze „stare" przyzwyczajenia do dedukcji odżywają w najróżnorodniejszych redukcjonizmach, tj. tendencji, by owo kompromitujące „i już" odsunąć i by go użyć tylko raz: a więc zjawiska socjologiczne wyjaśnić można psychologicznymi, te — biologią, ją znów — biochemią, tę — chemią, ją z kolei — fizyką, w całości sprowadzalną do teorii cząsteczek elementarnych, którą wyjaśnia hipoteza kwarków, w której trzeba powiedzieć „i już" (patrz np. G. Białkowski, „Delta" 4/1981).
To tłumaczenie się z powrotu do metodologii empirycznej, niepokój wywołany supremacją algorytmu i oszacowania, często probabilistycznego, skąd się to bierze? Czego właściwie żałujemy?

TA NASZA

Jest pewien warunek społeczny umożliwiający konsekwentne stosowanie metodologii empirycznej, a więc warunek, którego niespełnienie praktycznie ją wyklucza. Mianowicie możliwość nagromadzenia wielkiej ilości rezultatów powtarzalnych eksperymentów. Dlatego też bujnie rozwinęła się nauka empiryczna w wielkich państwach rolniczych zamierzchłej Starożytności. I dlatego nigdy nie mogła być wchłonięta przez sąsiadujące z nimi plemiona koczownicze. Tym potrzebny był inny rodzaj doświadczenia — taki, który pozwoliłby poradzić sobie w różnych okolicznościach, rozwiązać problemy w coraz to innych warunkach. Pasterz — koczownik musiał np. znaleźć wodę tam, gdzie się przypadkowo znalazł, musiał mieć zatem sposób uniwersalny, niezależny od okoliczności — w przeciwnym razie ginął. Odkrywał więc takie prawa jak: „woda płynie zawsze z góry na dół".
Szczególnie ważne jest tu słowo „zawsze". Jest to pierwszy krok na drodze abstrakcyjnego myślenia. „Zawsze" oznacza „niezależnie od wszelkich innych czynników". Innych od czego? — ano od „góry" i „dołu". A więc dostrzegalne aspekty rzeczywistości dzielono na mające znaczenie i pomijalne. Te mające znaczenie były pojęciami, o których wypowiadało się ogólne prawo. O innych — nie mówiło nic. Samo zaś prawo było egzemplifikacją kreującej metodologię dedukcyjną zasady: „ta sama przyczyna daje zawsze te same skutki". Tylko uwaga: przyczyna znów dotyczyła wyłącznie wyróżnionych pojęć, a nie całokształtu rzeczywistości. Konsekwentne wdrożenie zasady przyczynowo-skutkowej pozwalało na ustawianie zjawisk w ciągi: przyczyna — skutek, będący przyczyną następnego skutku itd, itd., który to ciąg rychło zyskał sobie miano dowodu — sposobu uzyskiwania ze znanych już praw praw nowych, dotąd nie znanych. Zwrot „matematyka, królowa nauk" jest konstatacją, iż ona pierwsza potrafiła tego typu metodologię sformułować i rygorystycznie jej przestrzegać. Wszystkie zastane „przepisy na piernik bakaliowy" zostały ostro zweryfikowane przez nową (historycznie rzecz biorąc dorycką) koncepcję poznawania rzeczywistości. Dla kolejno „poddawanych obróbce" fragmentów świata kompletowano zestaw pojęć (w rodzaju siła, przyspieszenie, pierwiastek, oddychanie itp.) zawsze abstrakcyjnych, a więc mających w rzeczywistości różne desygnaty. Wykrywano pierwsze rządzące tymi pojęciami prawa, z nich wyprowadzano następne. Doskonalono umiejętność dowodzenia, zestawiano prawa rządzące danym aspektem świata w teorie, te zaś w nauki. Poprzednią metodologię i jej rezultaty tam, gdzie nie zmieściły się w obrębie tak rozumianych nauk, chrzczono imionami magii i szamaństwa. Aż wreszcie w XVIII wieku postanowiono siecią nauk opleść cały Wszechświat.
Uczyniono więc to, czego w żadnym razie czynić nie należało. Bowiem już z samej konstrukcji nauka może zajmować się jedynie aspektami rzeczywistości. Nieszczęściem udało się ten plan zrealizować i pod koniec ubiegłego stulecia uczeni orzekli — wiemy wszystko, pozostały tylko drobne szczegóły. Ciąg dalszy opisany jest w Piśmie Świętym pod hasłem „wieża Babel", my nazywamy to obecnie specjalizacją. Nic więc dziwnego, że poprzednia metodologia podniosła głowę i połykać jęła podzieloną, rozdrobnioną naukę w dedukcyjnym sensie tej nazwy, o czym napisaliśmy w poprzedniej części artykułu.
Czytelnik zechce wybaczyć, że nie napiszemy, co będzie dalej.