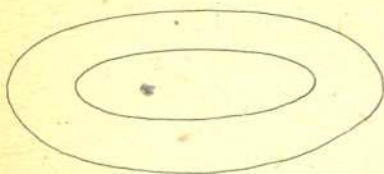


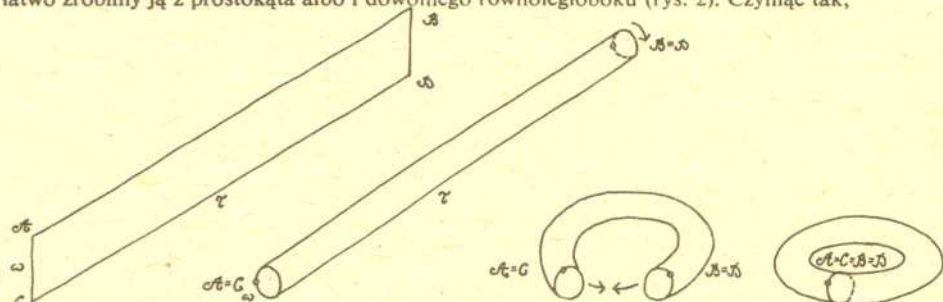
Dr Michał SZUREK

KOŃ, JAKI JEST, KAŻDY WIDZI

Każdy wie, co to torus. Charakterystyczny obwarzanek (rys. 1) jest jednym z ulubionych przez topologów przykładów powierzchni. Jest to powierzchnia obrotowa; starczy obracać jeden okrąg po drugim. Stąd i współrzędne „geograficzne” na torusie, lepsze niż na Ziemi, bo nie mają takich anomalii jak ziemskie wokół biegunów (glob ziemski jest niepraktycznie zbudowany, jak mawiał Hugo Steinhaus). Model torusa możemy otrzymać sklejając końcami elastyczną rurkę; łatwo zrobimy ją z prostokąta albo i dowolnego równoległoboku (rys. 2). Czyniąc tak,



Rys. 1. Torus.



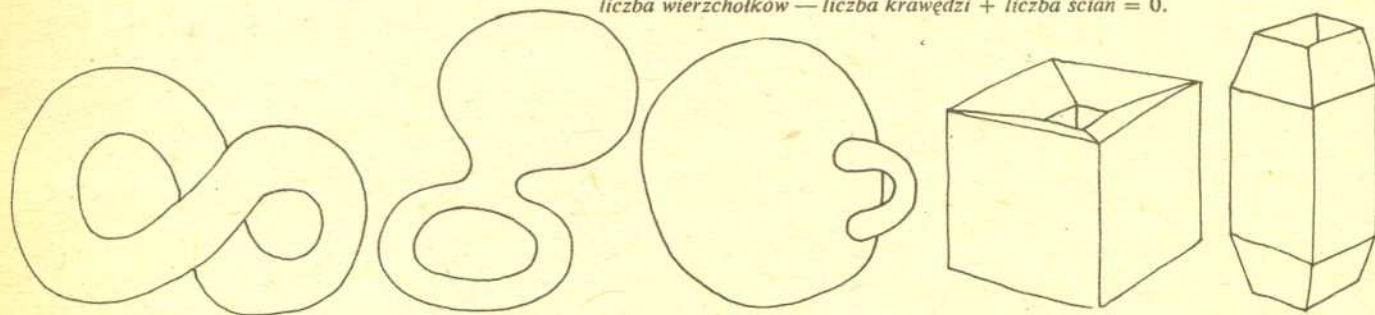
Rys. 2. Robimy torus z równoległoboku.

pozostajemy w ramach *topologii* — wykonujemy bowiem przekształcenia ciągłe. Topologia nie odróżnia figur powstających jedna z drugiej przez ściskanie, rozciąganie i dość dowolne wykrecanie. Możemy też „na chwilę” zbiór rozerwać — byle skleić go potem w tym samym miejscu. Zatem na rysunku 3 widzimy (topologicznym okiem) same torusy. Ostatnie z nich to wielościany; mają 16 wierzchołków, 32 krawędzie i 16 ścian, co nie zgadza się z wzorem Eulera:

$$\text{liczba wierzchołków} - \text{liczba krawędzi} + \text{liczba ścian} = 2,$$

ale wszystko w porządku, bo wzór ten dotyczy tylko wielościanów *prostych*, takich bez dziur jaką ma torus „w środku”. Dla wielościanów „z jedną dziurą”, mamy jak dla torusa

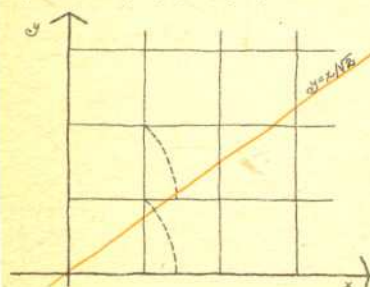
$$\text{liczba wierzchołków} - \text{liczba krawędzi} + \text{liczba ścian} = 0.$$



Rys. 3. Różne torusy topologiczne.



Rys. 4. Naklejamy płaszczyznę na torus.



Rys. 5. Z tej prostej powstanie gęsta owijka torusa.

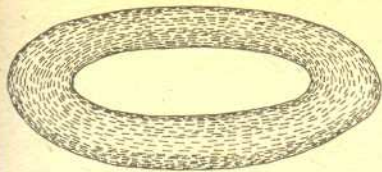
Do topologii należy też problem kolorowania map. W 1976 roku rozwiązano ponad stuletnie zagadnienie czterech barw: czterema kolorami *można* pomalować dowolną mapę polityczną na płaszczyźnie albo na sferze — powierzchni kuli. Wymagamy oczywiście, by sąsiednie państwa kolorować inaczej, zakładamy także, że w żadnym punkcie nie schodzą się więcej niż trzy granice. Dla map na torusie potrzeba na ogół aż 7 kolorów a dowód tego twierdzenia jest prostszy niż dla sfery i płaszczyzny; tak często bywa.

TROCĘ TEORII

Matematykom wygodnie patrzeć na całą płaszczyznę zamiast na jej fragment. Możemy zrobić sobie torus z całej płaszczyzny. Narysujmy na niej siatkę (będziemy ją nazywać kratą i oznaczać przez Γ) prostokątną albo i z dowolnymi równoległobokami jako oczkami. Nawijmy jedno oczko na torus tak, jak już umiemy, a pozostałe tak, jak to pierwsze (rys. 4). Taki sposób otrzymywania torusa nazwiemy *podzieleniem płaszczyzny przez kratę* i otrzymany torus oznaczymy przez C/Γ . Symbol C zapowiada, że później spojrzymy na dwuwymiarową płaszczyznę jako na zbiór liczb zespolonych. Podejście takie — jak każde nowe — pozwala jasno zobaczyć niektóre rzeczy do tej pory mało widoczne. Wspomnimy na przykład o zadaniu

Jak wygląda loksodroma na torusie?

(tj. krzywa przecinająca południki i równoleżniki pod stałymi kątami), o którym pisaliśmy w nr 1/1980. I tu tylko zwrócimy uwagę na *gęstą owijkę*: nitka nawijana na torus pod odpowiednim (jakim?) kątem nigdy nie dotknie sama siebie, chociaż przejdzie dowolnie blisko każdego punktu (rys. 5).



Rys. 6. Gładkie styczne pole wektorowe (czyli uczesanie) torusa.

W topologii można najwięcej. Założenia nakładane na funkcje (ciągłość) są stosunkowo słabe. Bardziej szczegółowa jest geometria różniczkowa; zajmuje się ona tymi własnościami figur, które nie zmieniają się przy wzajemnie jednoznacznych przekształceniach różniczkowalnych. Torusy z rys. 3 są nimi i z różniczkowego punktu widzenia (nietrudno znaleźć na to argumenty, o funkcje różniczkowalne prawie tak samo łatwo jak i o ciągłe) — z wyjątkiem ostatnich wielościanów. Wielościany nie należą do geometrii różniczkowej, nie da się ich otrzymać z gładkich powierzchni za pomocą funkcji mających wszędzie pochodną. Tracimy więc co najmniej jedną klasę modeli naszego torusa, zyskując w zamian pojęcia wektora stycznego i przestrzeni stycznej, ściśle związane z możliwością różniczkowania. To pozwala postawić i rozwiązać problem „zaczescania”.

Owłosiony torus daje się gładko uczesać: wystarczy skierować wszystkie włosy np. na zachód. Dla innych powierzchni może tak nie być.

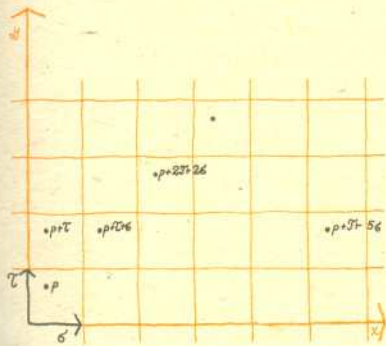
DYGRESJA

Kuli pokrytej włosami nie można nigdy całej gładko uczesać; zawsze jest co najmniej jeden punkt, w którym włosy utworzą wir bez określonego kierunku. To zdanie (wyrażające twierdzenie Borsuka) jest cytatem z „Kalejdoskopu Matematycznego” Hugona Steinhausa. Należy tę książkę, jak i „Kubusia Puchatka”, czytać przez całe życie. Miała kilkanaście wydań, w tym aż trzy polskie (1931, 1954 i 1956, to ostatnie było dodrukiem poprzedniego).

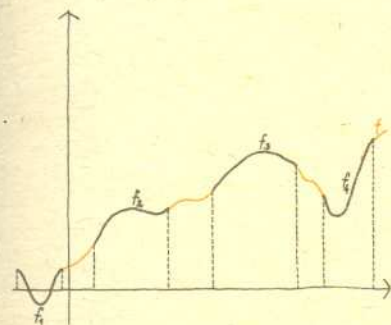
Dziś już nie wydaje się takich książek. Nie ma bowiem Autora, ani innego autora, a poza tym to dziś takich książek się nie pisze. Dziś się publikuje, najcenniejsze są publikacje zagraniczne, na szczęście faworyzuje to rozdrobnioną Europę.

Nie ma również takich poligrafów. W wydaniu z 1954 roku czcionka była duża i wyraźna, błędów korektorskich nie było. Był natomiast biały półkarton i 321 wyraźnych fotografii i rysunków, na których nie rozlały się kolory. Wysoką cenę książki (30 zł) rekompensowała nie tylko nadzwyczajna jakość tekstu, ale i piękne wydanie.

Dlaczego więc nie wznowić „Kalejdoskopu Matematycznego”? Braki papieru? Ogólne trudności? Nie bądź naiwny, Czytelniku. Kto bowiem mógłby na takiej książce dużo zarobić? Chyba tylko Wydawnictwo jako Instytucja (ale po co Wydawnictwu banknoty?), albo społeczeństwo (ale co komu po akordeonie?).



Rys. 7. Funkcje dwuokresowe muszą mieć te same wartości w odpowiednich punktach płaszczyzny.



Rys. 8.

Przez funkcję analityczną zmiennej zespolonej z (w punkcie z_0) rozumiemy taką funkcję, która w pewnym otoczeniu tego punktu może być przedstawiona w postaci zbieżnego szeregu potęgowego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Inne określenie znajduje się np. w artykule Włodzimierza Kuzaka. Iloraz funkcji analitycznych jest funkcją meromorficzną. Rozwinięcia funkcji meromorficznych na szeregi potęgowe mogą mieć składniki odpowiadające ujemnym potęgom:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

POCZĄTKI SYSTEMATYKI

Matematycy XIX wieku nauczyli nas patrzeć na powierzchnie przez pryzmat własności funkcji na nich. Za słabo powiedziane: to właśnie zainteresowanie własnościami funkcji pchnęło dalej geometrię powierzchni. W XIX wieku powierzchnia żyła dla funkcji, w pierwszej połowie XX bywała niezależnie, od pewnego zaś czasu ten apartheid ustępuje miejsca rozumnej koegzystencji. Spójrzmy i my na gromady funkcji na torusie i jego podzbiorach: funkcji ciągłych, różniczkowalnych raz, dwa, trzy, ..., dowolną liczbę razy. Skąd się one biorą? Skąd wziąć funkcje na torusie? Oczywiście — z funkcji na płaszczyźnie. Nie z byle jakich, rzecz jasna. Aby funkcja na płaszczyźnie C określała funkcję na torusie C/Γ , musi mieć te same wartości na każdym równoległoboku kraty Γ .

Można to nazwać dwuokresowością lub okresowością względem kraty i symbolicznie zapisać tak:

$$(1) \quad f(p) = f(p+\omega) = f(p+\tau),$$

gdzie p jest dowolnym punktem płaszczyzny, a ω i τ — wektorami kraty (rys. 7). Tak właśnie torus dziedziczy po płaszczyźnie jej funkcje ciągłe, różniczkowalne i wszystkie inne. Użyliśmy terminu *gromada* funkcji na oznaczenie przyporządkowania

podzbiór \mapsto zbiór funkcji na nim,

naprawdę nazywa się to *snopem*.

Funkcje ciągłe są giętkie, mamy tu na myśli mniej więcej tyle, że kawałki różnych funkcji ciągłych możemy złączyć w jeden (rys. 8). Niemal tak samo można wyginać funkcje różniczkowalne, chociaż złączenie dwóch odcinków funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną bywa kłopotliwe (rys. 9). Nie nada się (dlaczego?) żaden wielomian.

Kraty na płaszczyznach możemy przekształcać, np. rzutując jedne na drugie (rys. 10). Takie rzutowanie jest wzajemnie jednoznaczne, a także i ciągłe, i różniczkowalne. Dlatego z punktu widzenia topologii czy geometrii różniczkowej jest tylko jeden torus. Tu Czytelnik zapyta: jak to, jakie są inne torusy i co to w ogóle znaczy?

Jak widzieliśmy, torus C/Γ dziedziczy po płaszczyźnie jej funkcje. Także *funkcje analityczne*. Są to funkcje zmiennej zespolonej z , lokalnie rozwijalne na szereg potęgowy; dokładna definicja na marginesie. Nie są one tak sztywne jak wielomiany (każdy wielomian jest wszak wyznaczony przez swoje wartości w skończonej liczbie punktów), ani tak giętkie jak funkcje różniczkowalne i w ogóle ich własności pochylają się raz w stronę wielomianów a raz w stronę ogólnych własności funkcji różniczkowalnych.

Punkt płaszczyzny i liczba zespolona to — z odpowiedniego punktu widzenia — jedno i to samo. Tak oto na torusie i jego podzbiorach mamy funkcje analityczne — te, które powstają z funkcji analitycznych na płaszczyźnie spełniających warunek (1). Funkcje analityczne jednej zmiennej dobrze znano, rozumiano i wykorzystywano już w XIX wieku. Najciekawsza i najbardziej pożyteczna jest w nich właśnie ta swoista „dualność”: są dostatecznie ogólne a jednocześnie dość „sztywne”, by można było czasami ich współczynniki wyznaczać „algebraicznie” z układów równań. Ciekawe, że funkcje analityczne więcej niż jednej zmiennej nachylają się znacznie bardziej w stronę wielomianów niż ogólnych funkcji różniczkowalnych.

TORUSY ANALITYCZNE

Tak czy owak na torusie (różnych torusach C/Γ) mamy różne „gromady” funkcji analitycznych. Co ciekawsze, rzeczywiście różne: jeżeli zmienimy kratę, możemy zmienić w sposób istotny gromadę funkcji analitycznych torusa; powiedzieliśmy już, że funkcje ciągle czy różniczkowalne w gruncie rzeczy nie zmieniają się przy zmianie kraty. Ich „gromady” zmieniają się w sposób „nieistotny” ze zmianą Γ , formuluje się to tak: snopy funkcji ciągłych (różniczkowalnych) na różnych torusach C/Γ są izomorficzne.

Rozumowanie prowadzące do wyjaśnienia, kiedy owe struktury (czyli „gromady” funkcji) analityczne na torusach — teraz już możemy użyć liczby mnogiej — są takie same, stanowi piękny fragment XIX-wiecznej matematyki, solidnej, grubej i osadzonej mocno w konkretach, lecz trochę mistycznej i jak na dzisiejsze gusty nieco przyciężkiej. Żeby dojść do tej odpowiedzi prześledźmy się — bardziej ze względów historycznych niż jakichkolwiek innych — na płaszczyznę Siegela, czyli po prostu górną półpłaszczyznę. Nietrudno rozstrzygnąć prostą algebrą, kiedy dwie pary wektorów płaszczyzny Siegela H wyznaczają tę samą kratę. Mianowicie wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z tych par można przekształcić na drugą za pomocą przekształcenia postaci $x \mapsto ax + by$, $y \mapsto cx + dy$, gdzie a, b, c, d są całkowite i układają się w macierz o wyznaczniku $ad - bc = \pm 1$. Takie macierze tworzą grupę modularną; dalecy jesteśmy od poznania wszystkich własności algebraicznych macierzy 2×2 .

Łatwo uwierzyć, że struktura analityczna na torusie nie zmienia się przy jednokładnościach i obrotach kraty. Możemy wobec tego przyjąć, że jednym z wektorów kraty jest punkt $(1, 0)$, czyli liczba zespolona 1. Gdzie może być drugi? Odpowiedź nie jest oczywista: w zaznaczonym na rysunku 11 obszarze fundamentalnym G . Każdy wektor spoza obszaru fundamentalnego ma tam partnera, z którym pospołu z liczbą 1 daje kratę wyznaczającą ten sam torus. I oto kryterium, którego dowód tak się podobał autorowi artykułu: Jeżeli krata Γ jest wyznaczona przez wektory $(1, \omega)$, a krata Γ' , przez $(1, \omega')$, gdzie $\omega, \omega' \in G$, to wyznaczają one taką samą (precyzyjnie: izomorficzną) strukturę analityczną na torusie wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega = \omega'$. Ujmiemy to tak: obszar fundamentalny wiernie parametryzuje wszystkie struktury analityczne na torusie — każdej takiej strukturze odpowiada jeden określony punkt w obszarze fundamentalnym i odwrotnie. Że parametryzacja jest naturalna, a nie wydumana, nikt nie wątpi. Badanie takich przestrzeni parametrów dla różnego rodzaju struktur jest szalenie trudnym zadaniem geometrii algebraicznej, wyniki są najczęściej typu „zgadł i wyszło”.

FUNKCJE ELIPTYCZNE

Spoglądamy teraz na funkcje analityczne i meromorficzne na torusie. Dwie najważniejsze takie funkcje to funkcja Weierstrassa

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

i jej pochodna $p'(z) = \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{-2}{(z-\omega)^3}$; w napisanych szeregach nie bierze się pod uwagę

ewentualnych wyrazów z zerem w mianowniku. Piękne i pomysłowe rachunki prowadzą do następującego wyniku: Każda funkcja meromorficzna na torusie wyraża się wymiennie przez funkcję Weierstrassa i jej pochodną. Funkcje te nie są niezależne, zachodzi między nimi związek

$$(2) \quad p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3, \quad \text{gdzie } g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{\omega^6},$$

sumowanie nie obejmuje $\omega = 0$. Piszmy x zamiast p a y zamiast p' . Wtedy równanie (2) ma postać $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ i jest to równanie charakterystyczne naszego torusa, lepiej: jego struktury analitycznej.

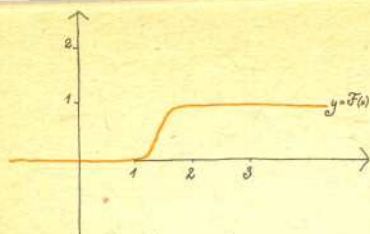
Umiemy od kraty przejść do równania charakterystycznego torusa. Co z przejściem odwrotnym? Mamy zależność typu

$$(3) \quad y^2 = 4x^3 - ax - b$$

i pytamy: jak wyznaczyć kratę odpowiadającą temu torusowi? Odpowiedź znów zdumiewa swoimi powiązaniem z faktami „nie z tej opery”. Oto dwa takie wektory (= liczby zespolone)

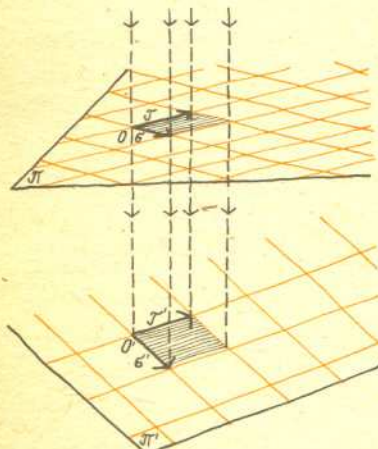
otrzymujemy obliczając całki oznaczone $\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - az - b}}$ po dwóch niezależnych pętłach

(okręgach) bazowych torusa. To całki eliptyczne; funkcje pierwotne wyrażen podcałkowych nie wyrażają się przez funkcje elementarne. My doszliśmy do nich wychodząc z bardziej naturalnego dziś badania torusa i struktur analitycznych na nim, ale historycznie wyglądało to odwrotnie. Całki eliptyczne znane już były braciom Bernoullim w XVII wieku, wiele prac (w latach 1756—1781) poświęcił im Leonard Euler i Norweg Niels Henryk Abel (w latach 1827—9). Być może czytając odpowiednio ich prace doszlibyśmy do wniosku, że wiedzieli oni wszystko to, o czym tu pisaliśmy, tyle że nie interesowały ich struktury analityczne na torusie, tylko co zrobić z całkami eliptycznymi.

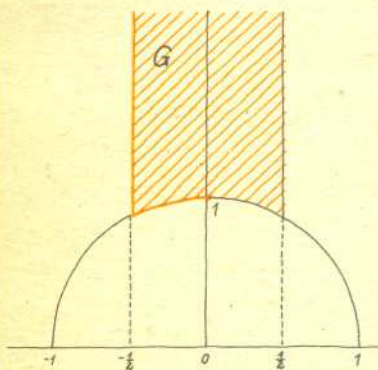


Rys. 9. $F(x) = \int_1^x f(t) dt / \int_1^2 f(t) dt$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x-2)} - e^{1/(x-1)} & \text{dla } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$



Rys. 10. Każdą kratę można otrzymać z innej przez rzutowanie.



Rys. 11. Punkty zaznaczonego obszaru G wiernie parametryzują zbiór wszystkich struktur analitycznych na torusie.

Każdy analityczny torus jest *algebraiczny*, chcemy tu tylko wyrazić to, że jego struktura analityczna jest dobrze opisana przez jedno proste równanie algebraiczne — (2) czy (3). Możemy więc interesować się krzywymi stopnia 3 uważając je za torusy. Za chwilę rozwinie tę uwagę, bo

WKRA CZAMY DO GEOMETRII RZUTOWEJ

Zapowiedzią apetytu jest niejaka omdlalość żołądka i lekkie zmęczenie (Anthelme Brillat-Savarin, Fiziologia smaku, PIW, 1980, s. 28). U nas też najciekawsze dopiero się zaczyna. Bo oto nasz torus jawi nam się jako rzutowa „krzywa” zespolona trzeciego stopnia, opisana w części „skończonej” jednym równaniem (3). Nazwalimy tu „krzywą” zbiór, który składa się z punktów o dwóch współrzędnych związanych jednym równaniem. Współrzędne te są zespolone, a co ma wymiar zespolony n , to zwykły $2n$, dlatego „krzywe zespolone” to zwykle powierzchnie. Ale możemy je właśnie badać jako krzywe.

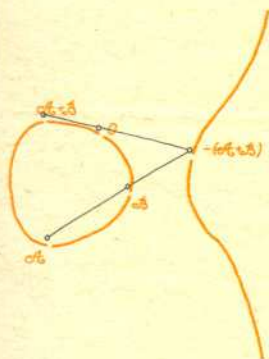
Gdy zrobimy wykres równania (3), dopuszczając z natury rzeczy tylko rzeczywiste wartości zmiennych (innych wykresów wszak zrobić nie sposób) to tak, jakbyśmy przecięli ten zanurzony w przestrzeni czterowymiarowej torus płaszczyzną. Zgadza się — w przecięciu dostaniemy dwa okręgi (prawa gałąź na rysunkach też jest okręgiem, bo zamyka ją punkt w nieskończoności — kierunek osi y). Zrobiliśmy tu typowy zabieg geometrii rzutowej: mieliśmy równanie (3) opisujące krzywą na płaszczyźnie i żeby nam było wygodniej, dołączyliśmy do tej krzywej jej punkty w nieskończoności. Otrzymaliśmy krzywą rzutową, słowo *krzywa* można wziąć w cudzysłów albo i nie. Krzywa ta jest trzeciego stopnia i każda krzywa rzutowa trzeciego stopnia da się w skończonej części opisać równaniem (3), w razie czego trzeba tylko zmienić układ współrzędnych.

Już Faniانو i Bernoulli w XVII wieku zauważyli pewną osobliwą własność krzywych (zespolonych albo i nie) trzeciego stopnia: można na nich w całkiem naturalny geometryczny sposób określić „dodawanie” punktów tak by — mówiąc współczesnym językiem — otrzymać grupę. Oto i ten sposób (rys. 12). Czy Czytelnik może pokusić się o ładny dowód łączności? O własnościach tej grupy i co z niej wynika dla geometrii pisaliśmy w numerze 12/1980. Na krzywych stopnia trzeciego żyje sobie zatem, w dobrej zgodzie z wszystkimi innymi strukturami, grupa. Czy to nas dziwi, jeśli przypomnimy sobie, że cały czas chodzi nam o torus? Nie powinno; na torusie takim, jakim widzieliśmy go na początku artykułu też jest naturalna struktura grupy: aby dodać dwa punkty, dodajemy ich odpowiednie współrzędne „geograficzne”: długość do długości, szerokość do szerokości. Na Ziemi to nie przejdzie (dlaczego?). Samodzielne przekonanie się, że to dodawanie pokrywa się z opisanym na rysunku 12 (jeżeli już krzywą zespoloną utożsamimy sobie z torusem) wymaga może sporej dozy wyobraźni — lub odpowiedniej maszyny do dowodzenia twierdzeń. Ciekawe, że na innych powierzchniach zamkniętych takiego „geometrycznego” działania nie ma.

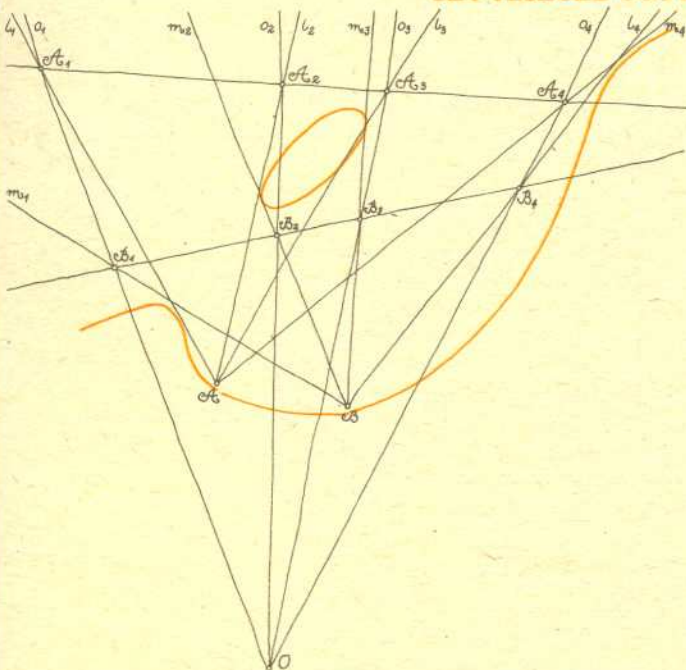
I znów siedzimy mocno w konkrety i tradycji: krzywom stopnia 3 poświęcił traktat sam Newton; byłoby interesujące prześledzić co on naprawdę o tym wiedział.

CZY JESZCZE COŚ ŻYJE NA TORUSIE?

O, tak, oczywiście. Widzieliśmy już, że mieści się tam jedna struktura topologiczna, jedna różniczkowa, a nieskończenie wiele analitycznych, uporządkowanych w obszar fundamentalny. Jest i grupa. Co jeszcze? Trzeba spojrzeć na inne funkcje. Węższą klasę niż wszystkie tu rozpatrywane stanowią *funkcje wymierne*, ilorazy wielomianów. Na nasz obwarzanek patrzymy więc jeszcze inaczej. I znów to samo pytanie: kiedy (dla jakich krat) dwa torusy mają te same „gromady” funkcji wymiernych? I jeszcze raz odpowiedź przychodzi z nieoczekiwanej strony. Popatrzymy na torus jako na krzywą zespoloną i będziemy stosować geometrię płaszczyzny. Płaszczyzny zespolonej (czyli czterowymiarowej przestrzeni rzeczywistej), ale posłużymy się geometrią analityczną i to będzie prawie wszystko jedno. Z dowolnego punktu A naszej krzywej poprowadzmy cztery styczne do niej: l_1, l_2, l_3, l_4 . Przetnijmy je prostą a — odpowiednio punkty przecięcia oznaczone są na rysunku 13 symbolami A_1, A_2, A_3 i A_4 . Okazuje się, że wartość stosunku anharmonicznego tych czterech punktów nie zależy od wyboru początkowego punktu A (na rys. 13 widzimy, że czwórka B_1, B_2, B_3, B_4 da się otrzymać z A_1, A_2, A_3, A_4 przez rzutowanie). Dowód wspomnianego twierdzenia nie jest prosty; stosunkowo łatwo wysnuć tylko wniosek: dwie krzywe stopnia trzeciego (pamiętamy, że w gruncie rzeczy chodzi o torusy) mają te same funkcje wymierne wtedy i tylko wtedy, kiedy dają ten sam stosunek anharmoniczny punktów A_1, A_2, A_3, A_4 . Możemy bowiem jedną krzywą przekształcić na drugą tak, by pierwsza z tych czwórek przeszła na drugą. Tak się da zrobić nawet za pomocą



Rys. 12. Dodawanie punktów na gładkiej krzywej trzeciego stopnia.



Rys. 13. Styczne wyprowadzone z punktu A krzywej trzeciego stopnia mają ten sam stosunek anharmoniczny, co styczne wyprowadzone z innego punktu B .

przekształcenia rzutowego, opisanego wielomianami pierwszego stopnia. Stosunek anharmoniczny punktów nie jest wyznaczony jednoznacznie: jeżeli wynosi on λ , to „równie dobrze” $1/\lambda, 1-\lambda, 1/(1-\lambda), \lambda/(\lambda-1), 1-1/\lambda$; wszystko zależy od kolejności punktów. Wygodnie byłoby zastąpić λ przez takie wyrażenie, które nie zmieni się, jeżeli λ zastąpimy przez jedną z pięciu podanych wartości. Oto takie wyrażenie, można sprawdzić, że się zgadza:

$$(4) \quad j = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2},$$

czynnik 256 gra oczywiście rolę kosmetyczną.

Do niezmiennika j doszliśmy poprzez geometrię. Nie byłby on może taki interesujący, gdyby nie było innych dróg. Jedną z nich jest algebraiczną interpretacją geometryczną: jeśli równaniem krzywej jest $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, to λ jest akurat wartością stosunku anharmonicznego 0, 1, λ i ∞ , wtedy j dostajemy wprost ze wzoru (4). Możemy to wykorzystać do obliczeń. Dla $y^2 = x^3 - x$ mamy $\lambda = -1$, więc $j = 1728$. Taka krzywa jest najbardziej naturalnym torusem, bo odpowiadającym kwadratowej siatce płaszczyzny. Możemy to sprawdzić, wychodząc od kwadratowej kraty i szukając równania. Taka krata jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczbę zespoloną i , a skoro tak, to $g_3 = 140 \sum \omega^{-6} = 140 \sum i^{-6} \omega^{-6} = -g_3$, tj. $g_3 = 0$. Równanie musi mieć postać $y^2 = x^3 - Ax$. Przecinając krzywą prostą $y = 0$ i obliczając stosunek λ dostajemy szybko właśnie $\lambda = -1$, czyli $j = 1728$. Krzywa $y^2 = x^3 - x$ jest rzeczywiście najważniejsza, można to by jeszcze „uzasadnić” na kilka innych sposobów.

Dla „krzywej Fermata” $x^3 + y^3 = z^3$ wyjdzie $j = 0$, trzeba się trochę narachować, aby dało się tę krzywą w części „skończonej” opisać równaniem $Y^2 = X^2(X-1)$.

Można dostać j wprost z kraty, oto formuła: $j = 1728 g_2^3 / (g_2^3 - 27 g_3^3)$, gdzie o g_2 i g_3 już mówiliśmy. To jest jeszcze jedna, analityczna, interpretacja j .

TORUSY SĄ WSZĘDZIE

Ci z matematyków, którzy uprawiają teorię liczb, żyją z rozwiązywania równań w liczbach całkowitych lub wymiernych. I oni też wtrącają się do torusów, prześledźmy to na skromnym przykładzie. Próbujmy rozwiązać w liczbach wymiernych równanie $y^2 + y = x^3 - x$; kilka rozwiązań zgadujemy: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, -1)$, może jeszcze $(2, 2)$. Zauważmy jednak, że jeżeli współrzędne punktów P i Q stanowią wymierne rozwiązanie naszego równania, to współrzędne punktu $P+Q$ też, gdzie — uwaga! — dodawanie punktów rozumiemy w sensie działania grupowego, opisanego wyżej (np. rys. 12). Nasza geometryczna metoda daje więc całą serię rozwiązań: $P = (0, 0)$,

$$P+P = (1, 0), P+P+P = (-1, -1), P+P+P+P = (2, -3), P+P+P+P+P = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right),$$

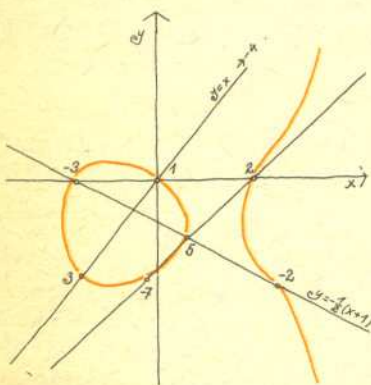
$P+P+P+P+P+P = (6, 14)$ i tak dalej; można też brać $-P-P, -P-P-P$ itd. Są to już **wszystkie** rozwiązania wymierne tego równania, dowód nie jest łatwy.

Torusy są wszędzie. Charakterystyczne równanie (2) można spotkać w wielu książkach o całkiem odległej treści: „Kurs arytmetyki”, „Teoria funkcji”, „Funkcje analityczne wielu zmiennych”, „Krzywe algebraiczne”, „ $SL_2(\mathbb{R})$ ”, „Wstęp do geometrii algebraicznej”, „Teoria ciał”, „Rozmaitości abelowe”; listę można by znacznie przedłużyć.

CO Z TEGO MAMY?

Geometria rzutowa to cała geometria. Te słowa Artura Cayley’a (1841 r.) sprawdziły się i u nas. Dopiero po związaniu z torusem płaskiej krzywej rzutowej dostaliśmy harmonijną, prostą i bardzo geometryczną teorię.

Geometria to badanie niezmienników grup przekształceń — brzmi teza Kleina. Wykładając to inaczej mówimy, że w topologii powierzchni możemy przekształcać w sposób wzajemnie jednoznaczny i ciągły (i będzie to ta sama, no, taka sama, powierzchnia), w geometrii różniczkowej — w sposób różniczkowalny, w analitycznej — w analityczny, w geometrii klasy β — za pomocą funkcji klasy β , cokolwiek by to znaczyło. O wszystkim decydują klasy funkcji dopuszczonych do głosu. Nic więc dziwnego, że patrząc stale na ten sam „przedmiot” — torus, widzieliśmy go za każdym razem inaczej. I tu autor wypowie wreszcie o co chodziło mu w całym artykule. O to mianowicie, by artykuł dostarczył argumentów do jakiegoś porównania matematyków do astronomów, którzy badając Wszechświat inaczej widzą go w promieniach widzialnych, rentgenowskich, podczerwonych, X, γ i Bóg jeszcze raczy wiedzieć w jakich.



Rys. 14. Poszukiwanie pierwiastków równania $y^2 + y = x^3 - x$. $P = (0, 0)$, $2P = (1, 0)$, $3P = (-1, -1)$, $4P = (2, -3)$, $5P = (1/4, -5/8)$, $6P = (6, 14)$, $7P = (-5/9, 8/27)$, $8P = (21/25, -69/125), \dots$

Rozwiązanie zadania M 294. Zauważmy, że

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ (p, n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{p < q \\ p+q=n+1 \\ (p, q)=1}} \frac{1}{pq} = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ (p, n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{1 \leq p < \frac{n+1}{2} \\ (p, n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} \quad \text{Ale}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq p < \frac{n+1}{2} \\ (p, n+1)=1}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n+1-p} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ (p, n+1)=1}} \frac{1}{p} \quad \text{i wobec tego } S_{n+1} = S_n \text{ dla każdego } n \geq 2, \text{ a więc } S_n = S_2 = \frac{1}{2}.$$