borelowskich. Istnieje jedyna miara σ-addytywna rozszerzająca miarę Jordana i określona na σ-ciele zbiorów borelowskich. Zwana jest ona miarą Lebesgue'a. Podobnie jak miara Jordana jest to miara niezmiennicza. Przy tym σ-ciało zbiorów borelowskich jest istotnym rozszerzeniem najmniejszego ciała zbiorów zawierającego odcinki. Można wykazać, że np. zbiór liczb wymiernych należy do pierwszego z nich, ale nie do drugiego. Jest on mierzalny w sensie Lebesgue'a, a niemierzalny w sensie miary Jordana; p. także artykuł W. Wojtyńskiego w *Delcie* 9/1979. W przypadku miar σ-addytywnych można wykazać, że nie istnieje taka miara *niezmiennicza*, określona na wszystkich podzbiorach prostej, płaszczyzny, przestrzeni, itd. bez względu na wymiar. Fakt ten był znany już na początku XX wieku. Wynika z niego w szczególności istnienie zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.

Dążenie do zmierzenia jak najbogatszej rodziny zbiorów doprowadziło do sformułowania w latach trzydziestych następującego problemu, którego autorem jest wielki polski matematyk, Wacław Sierpiński: Czy istnieje maksymalne rozszerzenie niezmiennicze miary Lebesgue'a? Innymi słowy, czy istnieje niezmiennicza miara σ-addytywna, która na zbiorach borelowskich pokrywa się z miarą Lebesgue'a, ale której już nie można rozszerzyć do miary niezmienniczej mierzącej więcej zbiorów. Negatywna odpowiedź na to pytanie została uzyskana całkiem niedawno. Tak więc jeśli jakość niezmienniczej miary σ-addytywnej określać na podstawie wielkości σ-ciała zbiorów, które można zmierzyć przy jej pomocy, to okazuje się, że nigdy nie dojdziemy do perfekcji w tym zakresie.

Porzućmy w tym miejscu rozważanie miar niezmienniczych i zajmijmy się zagadnieniem możliwości zdefiniowania jakiejkolwiek miary na ciele wszystkich podzbiorów przestrzeni euklidesowej. Jeśli nie uczynimy żadnych dodatkowych założeń, to taką miarę skonstruować niezwykle łatwo. Wybierzmy mianowicie jeden punkt przestrzeni i przypiszmy miarę 1 każdemu zbiorowi, do którego on należy, a miarę 0 pozostałym zbiorom. Czytelnik sprawdzi bez trudu, że tak określona funkcja jest rzeczywiście miarą, ba, nawet σ-addytywną. Analiza powyższego przykładu pokazuje, że aby problem miał większy sens, należy przynajmniej żądać, by miara każdego zbioru jednopunktowego była równa zeru (w naszym przykładzie tak oczywiście nie było). W ten sposób uściślony problem ma w dalszym ciągu odpowiedź twierdzącą dla przestrzeni euklidesowej o dowolnej ilości wymiarów (a więc w szczególności dla prostej, płaszczyzny i „zwykłej" przestrzeni).

Okazuje się natomiast, że to samo zagadnienie w przypadku miar σ-addytywnych jest bardzo trudne, tak trudne, że do dziś nie doczekało się jeszcze rozwiązania. Co więcej okazuje się, że sięga ono głęboko podstaw matematyki, mianowicie kwestii wyboru aksjomatyki. Wiadomo, że przy tej, którą matematycy powszechnie dziś stosują, nie można istnienia takiej miary σ-addytywnej udowodnić, niewykluczone natomiast, że uda się jej istnienie obalić. Byłoby to z pewnością bardzo doniosłe twierdzenie, a sformułowanie pytania wydaje się tak łatwe, że nic tylko sięgnąć po papier i długopis ... Ejże!

Problematyka, która została tu naszkicowana w najgrubszym zarysie wydaje się interesująca z szerszego, filozoficznego punktu widzenia. Zagadnienie miary, jak żadne chyba inne, pozwala prześledzić długą drogę, którą przebyła myśl ludzka od ściśle praktycznej działalności, jaką jest mierzenie, poprzez najprostsze ale już abstrakcyjne intuicje geometryczne, do stworzenia pojęć na wysokim stopniu abstrakcji i wreszcie w wyniku stawiania kolejnych pytań z nimi związanych — do badania fundamentów systemu dedukcyjnego. Droga ta wiedzie od miernictwa przez geometrię, teorię miary aż do podstaw teorii mnogości. Mógłby ktoś powiedzieć, że doszukiwanie się tego typu powiązań jest zabiegiem sztucznym, jednak rzut oka zarówno na historię rozwoju omawianej problematyki jak i wzajemne przenikanie się zagadnień leżących na styku kolejnych wymienionych dyscyplin upewnić może o istnieniu wspólnej, łączącej je nici.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 289. W wierzchołkach trójkąta ABC umieszczono masy równe długościom przeciwległych boków. Znaleźć środek ciężkości tego układu mas.
Rozwiązanie na str. 5.

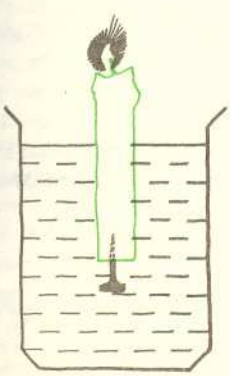
M 290. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele niepodzielnych przez 10 liczb naturalnych n takich, że suma cyfr liczby n jest równa sumie cyfr liczby $m \cdot n$.
Rozwiązanie na str. 6.

M 291. Wykazać, że w dowolnym trójkącie ABC jest

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4}$$

Rozwiązanie na str. 8.

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ



F 110. W naczyniu z wodą pływa, obciążona u dołu gwoździkiem, świeca (patrz rysunek). Czy taka konstrukcja świecznika zapewnia długotrwałe palenie się świecy?
Rozwiązanie na str. 13.

F 111. Szczelną skrzynkę drewnianą napełniono wodą i następnie przestrzelono kulą karabinową. Skrzynka rozerwała się na drzazgi. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 3.