Wzory asymptotyczne na ciągi rekurencyjne

W wielu problemach spotykamy się z ciągami określonymi rekurencyjnie. Wyprowadzenie wzoru na n-ty kolejny wyraz takiego ciągu bywa często trudne. Dla niektórych takich ciągów możemy znaleźć formuły asymptotyczne, przybliżone. Wyprowadzimy pewne wzory dla ciągów danych rekurencyjnie w postaci

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n); \tag{1}$$

gdzie o funkcji rzeczywistej f założymy, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (granica istnieje i jest równa zeru).

Posłużymy się znanym z analizy twierdzeniem Lagrange'a: jeżeli funkcja f ciągła w przedziale $[a, b]$ ma pochodną w przedziale (a, b), to $f(b)-f(a) = (b-a)\cdot f'(c)$, gdzie c jest pewnym punktem przedziału (a, b).

Ciągi rekurencyjne mają wiele wspólnego z równaniami różnicowymi. Nasze zadanie rozwiążemy układając pewne równanie różnicowe i zastępując je równaniem różniczkowym.

Jeżeli zamiast x_n napiszemy $F(n)$, to wzór (1) przepisze się jako

$$F(n+1) = F(n) + f\big(F(n)\big). \tag{2}$$

Funkcja F jest określona dla liczb naturalnych, możemy ją jednak z dużą dowolnością przedłużyć na liczby rzeczywiste; w szczególności możemy ją tak dobrać, by była różniczkowalna. Wtedy z (2) i z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$F'(n+\Theta) = f\big(F(n)\big), \text{ gdzie } 0 < \Theta < 1. \tag{3}$$

Z naszego założenia o funkcji f wynika, że różnice $f(b)-f(a)$ są małe dla dużych a i b. Jeśli zadbamy o to, by funkcja F między punktami całkowitymi miała „łagodny" przebieg, to będziemy mogli napisać przybliżoną równość

$$F'(n+\Theta) = F'(n), \tag{4}$$

a to prowadzi nas do jednorodnego równania różniczkowego

$$F'(x) = f\big(F(x)\big). \tag{5}$$

Rozwiążemy je łatwo metodą rozdzielania zmiennych. Przyjmując $y = F(x)$ otrzymujemy $\mathrm{d}y/f(y) = \mathrm{d}x$, skąd, całkując:

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = x - x_0. \tag{6}$$

Wartości x_0 i y_0 to nasze warunki początkowe; w oznaczeniach „ciągowych" x_0 jest numerem początkowego wyrazu ciągu, y_0 to wartość tego wyrazu. Przypominając sobie stare oznaczenia, pisząc $G(y)$ zamiast którejkolwiek funkcji pierwotnej funkcji $1/f(y)$ i przyjmując dla uproszczenia $n_0 = 0$ (tj. wyraz początkowy ma numer 0), mamy po bardzo łatwych rachunkach

$$x_n = G^{-1}\big(n + G(x_0)\big). \tag{7}$$

Oto i nasz przybliżony wzór na n-ty wyraz ciągu (1). Dokładność wzoru zależy od dokładności przybliżenia (3), tym lepszej im szybciej zmierza do zera funkcja f.

Przykład 1. Niech $x_0 = 25$, natomiast dla $n \geqslant 1$ $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Równanie (4) dla tego ciągu ma postać $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{1/y} = x - x_0$, skąd $G(y) = y^2/2$, tj. $x_n = \sqrt{2n+625}$.

Przykład 2. Ciąg dany jest formułą rekurencyjną $x_{n+1} = x_n + 2/x_n^2$ z warunkiem początkowym $x_0 = 2$. Po krótkich obliczeniach dostajemy wzór asymptotyczny $x_n = \sqrt[3]{6n+8}$. Dokładność przybliżenia obrazuje tabelka.

(*po skrótach redakcji*)

Robert KOWAL

$x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n + 2/x_n^2$

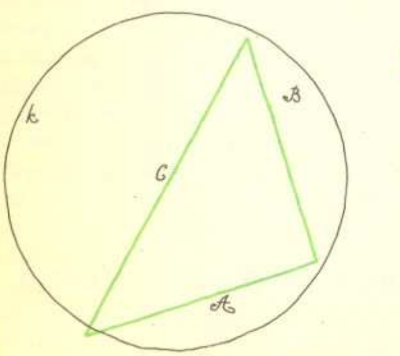
wyraz	wartość obliczona z formuły rekurencyjnej	wartość obliczona ze wzoru przybliżonego
x_0	2	
x_1	2,5	
x_5	3,469	3,362
x_{10}	4,177	4,082
x_{20}	5,119	5,040
x_{50}	6,810	6,753
x_{100}	8,514	8,472

Zadania, których nie umiemy rozwiązać (III)

Dzisiaj chcieliśmy zaproponować Czytelnikom kolejne zadanie z geometrii. Wprawdzie znamy jego rozwiązanie, ale nie satysfakcjonuje nas ono w pełni, jako dość skomplikowane. Może Czytelnicy będą umieli podać rozwiązanie prostsze?

A oto zadanie.

Niech punkty A, B, C należą do koła k. Skonstruować trójkąt wpisany w okrąg tego koła, taki by jego boki przechodziły odpowiednio przez dane punkty A, B, C.



PROOF