Od odważnika i linijki do podstaw matematyki

Dr Andrzej PELC

Można bez przesady powiedzieć, że rozmaite pomiary towarzyszyły ludziom od początku istnienia cywilizacji. Mierzono zawsze długość sztuk płótna, pole powierzchni upraw, objętość płynów, wagę kruszców, kąty przy nawigacji i mnóstwo innych wielkości. Wiele jednak upłynęło czasu zanim dostrzeżono wspólne cechy przysługujące różnym typom miar. Najpierw zostały zauważone pewne rachunkowe zależności pomiędzy np. długością i polem: zdano sobie sprawę z tego, że kwadrat o długości boku 2 jednostki ma zawsze pole równe czterem jednostkom kwadratowym. Nie tędy jednak wiodła droga do zrozumienia, co takiego łączy powiedzmy długość, pole i objętość, co upoważnia do nazwania pierwszej *miarą wielkości liniowych*, drugiego *miarą wielkości płaskich* a trzeciej *miarą wielkości przestrzennych*.

Dopiero na przełomie XIX i XX wieku pojawiły się pierwsze sformułowania pojęcia miary. Zanim jednak podamy definicje spróbujmy zastanowić się nad owymi wspólnymi cechami długości, pola i objętości, które dały początek matematycznemu pojęciu miary.

Każdy bez trudu zauważy, że pomiar długości polega na przypisaniu pewnej liczby nieujemnej (z mianem) danemu zbiorowi punktów na prostej, np. odcinkowi lub sumie trzech odcinków. Tak właśnie postępujemy, gdy mówimy, że jakaś wstęga ma długość 2 metrów, a trzy inne wstęgi razem długość 11 metrów. Oczywiście fakt, że rozważamy prostą zamiast wstęgi jest już wynikiem pewnej idealizacji matematycznej, ale jakże daleka stąd jeszcze droga do prawdziwie „dojrzałego", abstrakcyjnego pojęcia miary.

Zupełnie tak samo ma się rzecz z mierzeniem pola i objętości. Tak więc można się zgodzić, że cechą wspólną rozważanych trzech pojęć jest to, iż są one funkcjami z pewnej rodziny podzbiorów przestrzeni odpowiednio jedno-, dwu- i trójwymiarowej w zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. O jakich rodzinach podzbiorów mowa, o tym za chwilę.

Następna nietrudna obserwacja pozwala stwierdzić, że zbiorowi pustemu przypisana jest zawsze miara zero. Oto, gdy nie ma materiału, to jest go 0 metrów (centymetrów, kilometrów ...), gdy wypito piwo, to jest go 0 litrów (hektolitrów, metrów sześciennych ...). Tak więc umówmy się: miara przypisuje zbiorowi pustemu liczbę 0.

Kolejne spostrzeżenie stanowi z pewnością kluczowy krok przy definiowaniu miary. Otóż, gdy ja mam metr materiału na garnitur, a ktoś ma dwa metry, to razem mamy 3 metry pod warunkiem, że ani skrawek nie jest wspólny. Nie śmiejcie się Czytelnicy, że autor przypomina Wam reguły dodawania. W tym prostym przykładzie ukryta jest najważniejsza cecha miary: miara sumy dwóch zbiorów rozłącznych równa jest sumie ich miar.

Trzeba się jeszcze umówić, ile wynosi miara pewnego wzorcowego zbioru: odcinka $[0, 1]$ w przypadku prostej, kwadratu jednostkowego w przypadku płaszczyzny czy kostki jednostkowej w przestrzeni trójwymiarowej. Niech miara ta będzie równa np. 1.

Przed podaniem pełnej definicji miary warto się zastanowić, dla jakich rodzin zbiorów będziemy ją określać. Z pewnością zarówno zbiór pusty, jak i cała przestrzeń musi do takiej rodziny należeć. Ponadto chcielibyśmy jeszcze móc dodawać miary, a więc suma dwóch zbiorów z przypisaną miarą powinna także znaleźć się w naszej rodzinie zbiorów mierzalnych. Wreszcie, gdy jakiś zbiór A ma określoną miarę, to jego uzupełnienie do całej przestrzeni również „powinno" mieć określoną miarę, więc uzupełnienie A też musi być elementem rodziny zbiorów mierzalnych.

Rodziny o wymienionych przed chwilą własnościach nazywamy ciałami zbiorów.

Definicja 1. Ciałem zbiorów w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n nazywamy rodzinę S jej podzbiorów o następujących własnościach:

1. $\emptyset, E^n \in S$; zbiór pusty i cała przestrzeń należą do S,

2. Jeżeli $A, B \in S$, to $A \cup B \in S$,

3. Jeżeli $A \in S$, to $E^n - A \in S$.

Teraz możemy już podać definicję miary.

Definicja 2. Miarą (skończenie addytywną) w przestrzeni euklidesowej E^n nazywamy funkcję m określoną na ciele S podzbiorów tej przestrzeni, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych rozszerzonym o ∞ (nieskończoność) i mającą następujące własności

a) $m(\emptyset) = 0$; *miara zbioru pustego wynosi* 0,

b) $m(K^n) = 1$; *miara n-wymiarowej kostki* K^n *o boku* 1 *wynosi* 1,

c) jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $m(A \cup B) = m(A)+m(B)$; *miara sumy dwóch zbiorów rozłącznych jest równa sumie ich miar.*

Dołączenie do wartości miary wielkości ∞ jest zabiegiem naturalnym; wszak „prawdziwa" długość prostej czy „prawdziwe" pole płaszczyzny to właśnie ∞. Należy jednak wyjaśnić, jak będziemy rozumieć symbole $a+\infty$ i $\infty+\infty$. Otóż umawiamy się, że $a+\infty = \infty$ i $\infty + \infty = \infty$, a innych działań na symbolu ∞ nie wykonujemy.

Niektóre miary (a wśród nich długość, pole i objętość) mają ważną dodatkową cechę: miara zbioru równa jest mierze każdego zbioru z nim izometrycznego. Takie miary nazywają się *niezmiennicze*.

Przy badaniu własności miar istotne jest rozstrzygnięcie, na jakim ciele zbiorów mają być określone. Najmniejsze ciało składa się tylko z dwóch zbiorów: pustego i całej przestrzeni. Czujemy jednak, że to za mało. Rozważając np. miary na prostej chcielibyśmy umieć zmierzyć wszystkie odcinki. Miara niezmiennicza określona na najmniejszym ciele zbiorów zawierającym wszystkie odcinki nazywa się *miarą Jordana*. Taka miara istnieje i jest tylko jedna.

Naturalne wydaje się dążenie do definiowania miar na możliwie bogatych ciałach zbiorów, najlepiej na ciele wszystkich podzbiorów przestrzeni. W latach dwudziestych postawiono problem, czy można określić miarę niezmienniczą na wszystkich podzbiorach prostej (a także płaszczyzny, przestrzeni 3-wymiarowej itd.). Odpowiedź na to pytanie wynika z twierdzeń Hausdorffa i Banacha i jest twierdząca w przypadku prostej i płaszczyzny, a przecząca w przypadku przestrzeni trójwymiarowej i w większej liczbie wymiarów.

Inny zupełnie obraz otrzymamy, gdy wzmocnimy warunek c w definicji miary zastępując go warunkiem

c') dla dowolnego ciągu $A_n : n \in N$ parami rozłącznych zbiorów z rodziny S, $m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Napis $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ oznacza sumę *ciągu zbiorów*, czyli zbiór składający się ze wszystkich elementów należących do któregokolwiek ze zbiorów A_n; $n \in N$. Równość oznacza, że albo wartość miary po lewej stronie jest skończona, a szereg po prawej stronie jest zbieżny i ma sumę równą tej wartości, albo obie strony równe są ∞.

Oczywiście należy również zmienić warunek drugi w definicji ciała zbiorów zastępując go mocniejszym warunkiem

2'. jeśli $A_n \in S$ dla $n \in N$, to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in S$

Miary spełniające warunek c') nazywamy σ-addytywnymi, a ciała spełniające warunek 2' σ-ciałami. Najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie odcinki nazywa się σ-ciałem zbiorów

borelowskich. Istnieje jedyna miara σ-addytywna rozszerzająca miarę Jordana i określona na σ-ciele zbiorów borelowskich. Zwana jest ona miarą Lebesgue'a. Podobnie jak miara Jordana jest to miara niezmiennicza. Przy tym σ-ciało zbiorów borelowskich jest istotnym rozszerzeniem najmniejszego ciała zbiorów zawierającego odcinki. Można wykazać, że np. zbiór liczb wymiernych należy do pierwszego z nich, ale nie do drugiego. Jest on mierzalny w sensie Lebesgue'a, a niemierzalny w sensie miary Jordana; p. także artykuł W. Wojtyńskiego w *Delcie* 9/1979. W przypadku miar σ-addytywnych można wykazać, że nie istnieje taka miara *niezmiennicza*, określona na wszystkich podzbiorach prostej, płaszczyzny, przestrzeni, itd. bez względu na wymiar. Fakt ten był znany już na początku XX wieku. Wynika z niego w szczególności istnienie zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.
Dążenie do zmierzenia jak najbogatszej rodziny zbiorów doprowadziło do sformułowania w latach trzydziestych następującego problemu, którego autorem jest wielki polski matematyk, Wacław Sierpiński: Czy istnieje maksymalne rozszerzenie niezmiennicze miary Lebesgue'a? Innymi słowy, czy istnieje niezmiennicza miara σ-addytywna, która na zbiorach borelowskich pokrywa się z miarą Lebesgue'a, ale której już nie można rozszerzyć do miary niezmienniczej mierzącej więcej zbiorów. Negatywna odpowiedź na to pytanie została uzyskana całkiem niedawno. Tak więc jeśli jakość niezmienniczej miary σ-addytywnej określać na podstawie wielkości σ-ciała zbiorów, które można zmierzyć przy jej pomocy, to okazuje się, że nigdy nie dojdziemy do perfekcji w tym zakresie.
Porzućmy w tym miejscu rozważanie miar niezmienniczych i zajmijmy się zagadnieniem możliwości zdefiniowania jakiejkolwiek miary na ciele wszystkich podzbiorów przestrzeni euklidesowej. Jeśli nie uczynimy żadnych dodatkowych założeń, to taką miarę skonstruować niezwykle łatwo. Wybierzmy mianowicie jeden punkt przestrzeni i przypiszmy miarę 1 każdemu zbiorowi, do którego on należy, a miarę 0 pozostałym zbiorom. Czytelnik sprawdzi bez trudu, że tak określona funkcja jest rzeczywiście miarą, ba, nawet σ-addytywną. Analiza powyższego przykładu pokazuje, że aby problem miał większy sens, należy przynajmniej żądać, by miara każdego zbioru jednopunktowego była równa zeru (w naszym przykładzie tak oczywiście nie było). W ten sposób uściślony problem ma w dalszym ciągu odpowiedź twierdzącą dla przestrzeni euklidesowej o dowolnej ilości wymiarów (a więc w szczególności dla prostej, płaszczyzny i „zwykłej" przestrzeni).
Okazuje się natomiast, że to samo zagadnienie w przypadku miar σ-addytywnych jest bardzo trudne, tak trudne, że do dziś nie doczekało się jeszcze rozwiązania. Co więcej okazuje się, że sięga ono głęboko podstaw matematyki, mianowicie kwestii wyboru aksjomatyki. Wiadomo, że przy tej, którą matematycy powszechnie dziś stosują, nie można istnienia takiej miary σ-addytywnej udowodnić, niewykluczone natomiast, że uda się jej istnienie obalić. Byłoby to z pewnością bardzo doniosłe twierdzenie, a sformułowanie pytania wydaje się tak łatwe, że nic tylko sięgnąć po papier i długopis ... Ejże!

Problematyka, która została tu naszkicowana w najgrubszym zarysie wydaje się interesująca z szerszego, filozoficznego punktu widzenia. Zagadnienie miary, jak żadne chyba inne, pozwala prześledzić długą drogę, którą przebyła myśl ludzka od ściśle praktycznej działalności, jaką jest mierzenie, poprzez najprostsze ale już abstrakcyjne intuicje geometryczne, do stworzenia pojęć na wysokim stopniu abstrakcji i wreszcie w wyniku stawiania kolejnych pytań z nimi związanych — do badania fundamentów systemu dedukcyjnego. Droga ta wiedzie od miernictwa przez geometrię, teorię miary aż do podstaw teorii mnogości. Mógłby ktoś powiedzieć, że doszukiwanie się tego typu powiązań jest zabiegiem sztucznym, jednak rzut oka zarówno na historię rozwoju omawianej problematyki jak i wzajemne przenikanie się zagadnień leżących na styku kolejnych wymienionych dyscyplin upewnić może o istnieniu wspólnej, łączącej je nici.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 289. W wierzchołkach trójkąta *ABC* umieszczono masy równe długościom przeciwległych boków. Znaleźć środek ciężkości tego układu mas.
Rozwiązanie na str. 5.

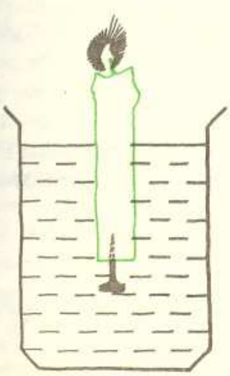
M 290. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele niepodzielnych przez 10 liczb naturalnych n takich, że suma cyfr liczby n jest równa sumie cyfr liczby $m \cdot n$.
Rozwiązanie na str. 6.

M 291. Wykazać, że w dowolnym trójkącie *ABC* jest

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4}$$

Rozwiązanie na str. 8.

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ



F 110. W naczyniu z wodą pływa, obciążona u dołu gwoździkiem, świeca (patrz rysunek). Czy taka konstrukcja świecznika zapewnia długotrwałe palenie się świecy?
Rozwiązanie na str. 13.

F 111. Szczelną skrzynkę drewnianą napełniono wodą i następnie przestrzelono kulą karabinową. Skrzynka rozerwała się na drzazgi. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 3.