Zamieszczony obok artykuł jest fragmentem pracy maturalnej autora, wykonanej w 1981 roku w XIV LO we Wrocławiu pod kierunkiem *mgr Cecylii TERLIKOWSKIEJ*. Praca ta została wyróżniona **złotym medalem** w dorocznym konkursie prac maturalnych z matematyki, organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i miesięcznik „Delta". Autor wprowadza w niej *pojęcie przystawania (kongruencji)* liczby algebraicznej do układu innych liczb i stosuje je w różnych zagadnieniach teorii liczb, z których w artykule omówiono tylko jedno.

O kongruencjach wśród liczb algebraicznych całkowitych

Jarosław WRÓBLEWSKI

Oznaczmy przez A zbiór liczb algebraicznych całkowitych nad Z, tj. zbiór wszystkich pierwiastków równań

$$x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0=0,$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a współczynniki $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ są liczbami całkowitymi. Dla ustalonej liczby pierwszej p przez Q oznaczymy zbiór liczb postaci $a_1p+a_2\sqrt{p}+a_3\sqrt[3]{p}+\ldots+a_n\sqrt[n]{p}$, $n\in N$, a_i — całkowite. Wprowadźmy następujące pojęcie przystawania liczby algebraicznej do układu innych liczb.

Definicja: Jeśli $a\in A$ oraz dla pewnych $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest $(a-b_1)\cdot(a-b_2)\cdot\ldots\cdot(a-b_n)\in Q$, to zapiszemy $a\in(b_1, b_2, \ldots, b_n) \bmod p$. 0 liczbach $b_1, b_2, \ldots, b_n$ w najogólniejszym przypadku można założyć, że są algebraiczne całkowite, ale my dla uproszczenia przyjmiemy, że są one liczbami całkowitymi. Układ liczb $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nazwiemy układem reszt liczby *a modulo p*. Nie każda liczba z A ma układ reszt, np. liczba $\sqrt{2}$ nie posiada układu reszt *modulo* 3. Niech więc S będzie zbiorem takich $a\in A$, że $a\in(b_1, b_2, \ldots, b_n) \bmod p$ dla pewnych $b_1, b_2, \ldots, b_n$ całkowitych. 0 liczbach $b_1, b_2, \ldots, b_n$ można bez szkody założyć, że są wybrane ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, gdyż
$a\in(b_1, b_2, \ldots, b_n) \bmod p \Leftrightarrow a\in(b_1', b_2', \ldots, b_n') \bmod p$, gdzie b_i' jest resztą z dzielenia liczby b_i przez p.
Wtedy każdy element $a\in S$ ma podstawowy układ reszt *modulo p*, tj. taki układ reszt, że każdy układ reszt liczby *a modulo p* jest nadukładem tego układu. Układ podstawowy jest wyznaczony jednoznacznie. W układzie podstawowym $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są różne.

Twierdzenie: Jeśli $a_1, a_2\in S$ oraz $a_1\in(b_1, b_2, \ldots, b_n) \bmod p$ i $a_2\in(d_1, d_2, \ldots, d_k) \bmod p$, to:
(1) $a_1+a_2\in(b_i+d_j) \bmod p$, gdzie przez b_i+d_j rozumiemy układ złożony ze wszystkich sum b_i+d_j, gdzie $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant k$,
(2) $a_1\cdot a_2\in(b_i\cdot d_j) \bmod p$,
lub ogólniej:
(3) dla dowolnego wielomianu $W(x, y)$ o współczynnikach całkowitych mamy:
$W(a_1, a_2)\in\left(W(b_i, d_j)\right) \bmod p$.

Wszystkie powyższe warunki mają uogólnienie na przypadek nie dwóch, a $m\geqslant 2$ liczb $a_1, a_2, \ldots, a_m\in S$.

Jeśli a jest liczbą całkowitą i b jest resztą z dzielenia a przez p, to (b) jest podstawowym układem reszt liczby *a modulo p*.

A oto kilka przykładów kongruencji:
$\sqrt{2}\in(3,4) \bmod 7$, bo $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-4)=7(2-\sqrt{2})$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}\in(5, 18) \bmod 23,\\ \sqrt{3}\in(7, 16) \bmod 23,\end{array}\right\}\text{stąd } \sqrt{2}+\sqrt{3}\in(2, 11, 12, 21) \bmod 23,$$

$\sqrt{5}\in(0) \bmod 5$,
$\sqrt{23}+\sqrt{2}\in(0, 1, 6) \bmod 7$.
I na zakończenie przykład zastosowania wprowadzonych kongruencji:

Przykład: Liczba $a=(\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}+(\sqrt{6}-\sqrt{19})^{1980}$ jest liczbą całkowitą. Znaleźć jej ostatnią cyfrę.
Rozwiązanie: $\sqrt{6}+\sqrt{19}\in(1) \bmod 2$, podobnie $\sqrt{6}-\sqrt{19}\in(1) \bmod 2$. Zatem $(\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}\in(1^{1980}) \bmod 2$, czyli $(\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}\in(1) \bmod 2$, a także $(\sqrt{6}-\sqrt{19})^{1980}\in(1) \bmod 2$. Stąd $a\in(0) \bmod 2$ tj. a jest parzysta. Ponadto $\sqrt{6}\in(1, 4) \bmod 5$, $\sqrt{19}\in(2, 3) \bmod 5$, $\sqrt{6}+\sqrt{19}\in(1, 2, 3, 4) \bmod 5$, skąd $(\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}\in(1, 1, 1, 1) \bmod 5$, więc $(\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}\in(1) \bmod 5$.
Podobnie $(\sqrt{6}-\sqrt{19})^{1980}\in(1) \bmod 5$ i $a\in(2) \bmod 5$. Na podstawie powyższych kongruencji otrzymujemy, że $10|a-2$, czyli a jest zakończone cyfrą 2.

Liczba $b=((\sqrt{6}+\sqrt{19})^{1980}-(\sqrt{6}-\sqrt{19})^{1980})\cdot\sqrt{6\cdot 19}$ jest całkowita. Proponuję Czytelnikowi znaleźć jej ostatnią cyfrę.

Rozwiązanie zadania F 110.
Pływająca świeca z gwoździkiem jest ciałem niejednorodnym. W miarę wypalania się stearyny, średnia gęstość bryły wzrasta i zwiększać się musi jej zanurzenie. Nie oznacza to bynajmniej, że świeca wkrótce po zapaleniu zatonie. Wręcz przeciwnie, pływając, spala się prawie do końca. Zauważmy bowiem, iż „większe zanurzenie" oznacza wzrost stosunku objętości: części zanurzonej oraz całkowitej. Obie te wielkości w trakcie spalania maleją, a ich różnica, będąca miarą długości wynurzonej części świecy, zmienia się znacznie wolniej. Jeśli Czytelnik nie czuje się usatysfakcjonowany powyższymi jakościowymi wywodami, proponujemy aby przeprowadził odpowiednie rachunki. Po podstawieniu tablicowej wartości gęstości stearyny 0,9 g/cm³ okaże się, że świeca pogrąża się ok. dziesięciokrotnie wolniej niż skraca. Jeśli nawet teraz wyobraźnia odmawia posłuszeństwa, pozostaje ostateczny „sędzia" — eksperyment.
W powyższych rozważaniach pominęliśmy efekt tworzenia się u podstawy płomienia nieckowatego wgłębienia. Jest to istotny czynnik przedłużający czas palenia się świecy.