

Dyfrakcja powolnych elektronów — metoda badania struktury powierzchni kryształów

Doc. dr Stefan MRÓZ

1. Falowe własności elektronu. Doświadczenie Davissona i Germera

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

czyli

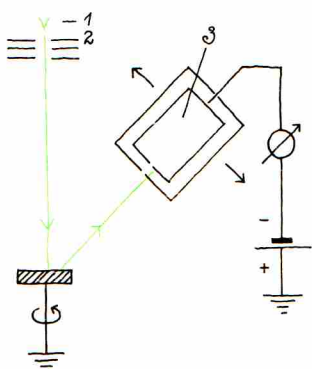
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

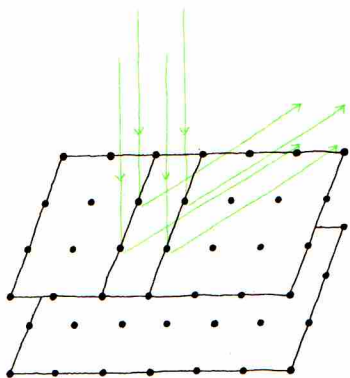
czyli

$$p = \sqrt{2mE}$$

$$\lambda = \frac{12,25 \times 10^{-10}}{\sqrt{E}} \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat doświadczenia Davissona i Germera. Elektrony emitowane z termokatody 1 przechodziły przez układ diafragm 2 formując wiązkę pierwotną. Wiązka ta padała na powierzchnię kryształu niklu. Kryształ mógł być obracany wokół osi prostopadłej do „roboczej” powierzchni. Wiązka ugięta mogła trafić do kolektora posiadającego podwójne, izolowane od siebie elektrycznie ścianki. Między ścianki kolektora przyłożono hamującą elektrony różnicę potencjałów, dzięki czemu do wnętrza kolektora nie dochodziły elektrony emisji wtórnej. Kolektor mógł być obracany wokół osi równoległej do „roboczej” powierzchni kryształu i przechodzącej przez miejsce padania wiązki pierwotnej na tę powierzchnię. Dzięki skojarzeniu ruchów kryształu i kolektora można było kolejno wprowadzać do kolektora wszystkie wiązki ugięte „do tyłu”. Wiązki ugięte „do przodu” były pochłaniane wewnątrz kryształu. Całe urządzenie umieszczone było w wysokiej próżni, co było niezbędne dla zapewnienia czystości badanej powierzchni i dla uniknięcia zderzeń elektronów z cząsteczkami gazu.



Rys. 2. Ugięcie wiązki elektronów na jednej warstwie atomów. Obie wiązki, padająca i ugięta, są prostopadłe do zaznaczonej liniami rodziny rzędów atomów.

Zapewne Czytelnikom znana jest hipoteza de Broglie’a, że dualizm korpuskularno-falowy dotyczy nie tylko fotonów, ale w równej mierze cząstek materialnych. Jeśli zatem są doświadczalne podstawy dla przypisania fotonowi o energii $E = h\nu$ i pędu p danej zależnością (1), to należy, w myśl tej hipotezy, przypisać cząstce materialnej o pędzie p falę o długości λ związanej z pędem cząstki tą samą zależnością.

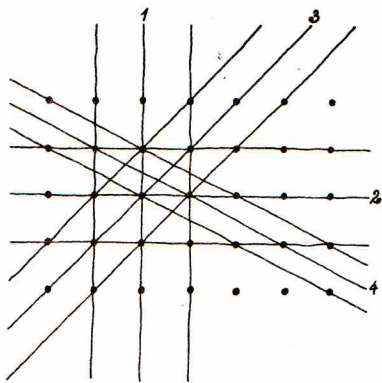
Hipoteza de Broglie’a nie zawierała wyjaśnienia natury fali związanej z materialną cząstką. Wyjaśnienie takie wynikało dopiero z rozwoju mechaniki kwantowej operującej pojęciem funkcji falowej. Funkcja ta jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia opisywanej cząstki w danym elemencie przestrzeni. Korzystając z równania (2) wiążącego energię kinetyczną cząstki i jej pęd znajdziemy dla elektronu zależność (3) między jego energią i długością odpowiadającej mu fali de Broglie’a. Z zależności tej λ otrzymuje się w metrach, jeśli energia wyrażona jest w elektronowoltach. Widać, że dla energii wynoszącej od kilkudziesięciu do kilkuset elektronowoltów długość fali de Broglie’a jest porównywalna z odległością między atomami w kryształach, równą dziesiątym częściom nanometra. Wynika stąd, że kryształ powinien być dobrą siatką dyfrakcyjną dla fal de Broglie’a związanych z elektronami o takich energiach, czyli z powolnymi elektronami, jak je będziemy dalej nazywać.

Pierwsze doświadczenie z dyfrakcją powolnych elektronów wykonali w 1927 roku Davisson i Germer. Wykryli oni cały szereg wiązek ugiętych i pokazali, że ich obserwacje można zadowalająco wytłumaczyć na podstawie hipotezy de Broglie’a i zależności (3). Jedno z pierwszych w świecie doświadczeń z dyfrakcją powolnych elektronów wykonał w Polsce w 1928 roku Szczepan Szczeniowski, posługując się w tym celu kryształem bizmutu.

Celem pierwszych doświadczeń z dyfrakcją powolnych elektronów było sprawdzenie hipotezy de Broglie’a. Okazało się jednak, że doświadczenia takie mogą być źródłem cennych, unikalnych informacji o strukturze krystalicznej powierzchni kryształów i ta właśnie możliwość zadecydowała o znaczeniu dyfrakcji powolnych elektronów we współczesnej fizyce.

2. Co decyduje o kierunkach rozchodzenia się wiązek ugiętych?

Powolne elektrony silnie oddziałują z materią tracąc swą energię w niesprężystych zderzeniach. Atomy położone w głębi kryształu nie dają zatem wkładu do dyfrakcji powolnych elektronów, gdyż poddane na nich dyfrakcji elektrony o energii zmniejszonej wskutek niesprężystych zderzeń nie dają się wyodrębnić z tła tworzonego przez elektrony emisji wtórnej (patrz rys. 2). Przyjmijmy zatem dla uproszczenia rozważań, że dyfrakcja powolnych elektronów zachodzi tylko na pierwszej warstwie atomów kryształu i rozważmy przypadek, gdy wiązka pierwotna jest prostopadła do „roboczej” powierzchni kryształu. Sytuacja taka jest pokazana na rys. 2, gdzie schematycznie narysowano dwie pierwsze warstwy atomów. Atomy pierwszej warstwy tworzą regularną, dwuwymiarową strukturę.

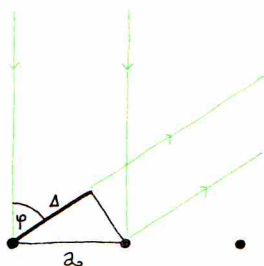


Rys. 3. Przykłady różnych rodzin rzędów atomów dla dwuwymiarowej struktury krystalicznej.

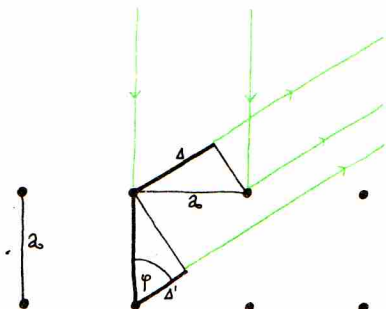
$$\Delta = a \sin \varphi$$

Wzmocnienie rozważanych wiązek nastąpi wtedy, gdy różnica ich dróg będzie całkowitą wielokrotnością długości fali.

$$\Delta = a \sin \varphi = n \lambda$$



Rys. 4. Ugięcie wiązki pierwotnej na pierwszej warstwie atomów pokazanej w przekroju. Różnica Δ dróg wiązek ugiętych na sąsiednich rzędach atomów zależy od kąta padania wiązki pierwotnej φ i od odległości a między tymi rzędami.



Rys. 5. Ugięcie wiązki pierwotnej na dwóch pierwszych warstwach atomów. Dla uproszczenia rachunków przyjęto, że odległość między rzędami atomów w warstwie jest taka sama, jak odległość między warstwami. Dla wzmocnienia zaznaczonych na rysunku wiązek muszą być spełnione warunki

$$\Delta = a \sin \varphi = n \lambda \quad (6a)$$

$$\Delta' = a + a \cos \varphi = m \lambda \quad (6b)$$

Po przekształceniach algebraicznych i trygonometrycznych równania (6) przyjmują postać

$$\sin^2 \varphi = \frac{n^2 \lambda^2}{a^2} \quad (7a)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{2m \lambda a - m^2 \lambda^2}{a^2} \quad (7b)$$

Przyrównując prawe strony równań (7) otrzymujemy zależność

$$\frac{2m \lambda a - m^2 \lambda^2}{a^2} = \frac{n^2 \lambda^2}{a^2} \quad (8)$$

skąd

$$\lambda = \frac{2ma}{m^2 + n^2} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$I = I_0 e^{-aT} \quad (10)$$

Wszystkie te atomy układają się w rodzinę rzędów atomów i istnieje dowolnie wiele takich rodzin, co widać na rys. 3.

Zauważmy, że fale de Broglie'a ugięte na różnych atomach danego rzędu atomów w kierunku prostopadłym do tego rzędu mają zgodne fazy, jeśli tylko wiązka pierwotna jest również prostopadła do rozważanego rzędu atomów. W naszym przypadku fale ugięte na wszystkich atomach danego rzędu wzmocnią się w każdym kierunku prostopadłym do danego rzędu. Z wszystkich możliwych takich kierunków trzeba teraz wybrać te, dla których wzmocnią się fale ugięte na sąsiednich rzędach. Z rys. 4 i ze wzoru (5) widać, że kierunki, dla których wzmacniają się wiązki ugięte na sąsiednich, a zatem i na wszystkich rzędach danej rodziny, istnieją zawsze, jeśli tylko odległość między rzędami a jest większa od długości fali λ .

Z doświadczenia Davissona i Germera wynikało jednak, że poszczególne wiązki ugięte były najintensywniejsze dla pewnych energii elektronów, czyli dla pewnych λ . Nasze dotychczasowe rozważania nie przewidują takiego wyniku, ponieważ nie uwzględniliśmy udziału w dyfrakcji atomów z warstwy drugiej i warstw głębszych. Z zależności (9) widać, że wzmocnienie fal ugiętych na dwóch sąsiednich warstwach atomów, a tym samym i ugiętych na całym kryształ, możliwe jest tylko dla pewnych długości fal. Maksyma natężenia wiązki ugiętej występujące przy spełnieniu warunków takiego typu jak warunek (9) są w przypadku dyfrakcji powolnych elektronów znacznie mniej ostre, niż w przypadku dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego. Znaczący to, że udział warstw głębszych w dyfrakcji powolnych elektronów nie może być wprawdzie pominięty, ale jest stosunkowo mały.

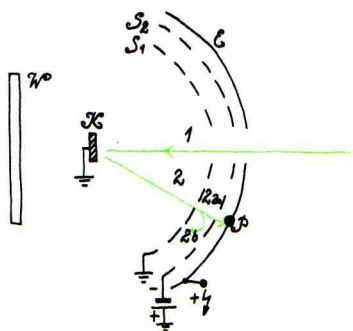
Każda rodzina rzędów atomów wytwarza własne wiązki ugięte. Z symetrii przestrzennego rozkładu tych wiązek można wnosić o sposobie ułożenia atomów na powierzchni, czyli o strukturze krystalicznej tej powierzchni.

Wiązki ugięte otrzymywane przy dyfrakcji światła na dwuwymiarowej siatce dyfrakcyjnej można łatwo obserwować patrząc wieczorem przez tkaninę parasola na odległe, punktowe światło. Obserwujemy wtedy wiązki ugięte „do przodu”, a nie „do tyłu”, jak to jest przy dyfrakcji powolnych elektronów. Nie powoduje to jednak istotnej zmiany w opisie zjawiska.

3. Czy drgania cieplne atomów nie przeszkadzają dyfrakcji?

W rozważaniach prowadzonych w poprzednim rozdziale przyjęliśmy, że dyfrakcja zachodzi na atomach tworzących regularną strukturę.

W rzeczywistości atomy tworzące kryształ wykonują drgania cieplne i w temperaturze pokojowej typowa amplituda tych drgań stanowi kilka procent odległości między sąsiednimi atomami. Siatka dyfrakcyjna utworzona przez atomy kryształu wydaje się zatem bardzo niedoskonała i można się obawiać, że wiązki ugięte otrzymane przy jej użyciu będą bardzo rozmyte. Obawy takie nie są jednak uzasadnione. Drgania cieplne atomów są chaotyczne i średnie w czasie wychylenie każdego z atomów z jego położenia równowagi równa się zero. Jak pokazał Debye w 1914 roku, chaotyczne drgania cieplne atomów prowadzą tylko do zmniejszenia natężenia wiązek ugiętych, bez ich przestrzennego rozmycia (Debye pokazał to dla dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego, ale wynik ten jest oczywiście ważny dla każdej dyfrakcji). Amplituda drgań cieplnych rośnie wraz z temperaturą kryształu, zatem natężenie wiązek ugiętych maleje przy wzroście temperatury. Zależność ta przedstawiona jest równaniem (10), gdzie T jest temperaturą kryształu, zaś a — stałą, zależną od tak zwanej temperatury Debye'a (charakterystycznej dla każdego materiału wielkości, związanej z jego własnościami cieplnymi).



Rys. 6. Zasada działania współczesnego dyfraktografu. Wiązka elektronów pierwotnych wytworzona w specjalnej wyrzutni elektronów pada na powierzchnię kryształu umieszczonego w środku krzywizny układu dwóch koncentrycznych, sferycznych, metalowych siatek S_1 i S_2 i sferycznego ekranu luminescencyjnego E . Elektrony emisji wtórnej i wiązki ugięte 2 trafiają między siatkami na hamujące pole elektryczne dobrane w taki sposób, aby przed siatką S_2 elektrony emisji wtórnej (2b) zostały zawrócone. Elektrony z wiązek ugiętych (2a) przechodzą przez siatkę S_2 i są przyspieszane wysokim dodatnim napięciem w kierunku ekranu luminescencyjnego E . Na ekranie tym każda wiązka tworzy jasną plamkę P , a plamki te układają się w obraz dyfrakcyjny. Obraz ten jest oglądany przez wzornik W dyfraktografu.

4. Jak jest zbudowany współczesny dyfraktograf dla powolnych elektronów?

Urządzenie Davissona i Germera ma już dzisiaj tylko wartość historyczną. Jego podstawową wadą był brak możliwości obserwacji wszystkich wiązek ugiętych. Od ponad dwudziestu lat używane są dyfraktografy wykorzystujące w swej konstrukcji ideę sformułowaną przez Ehrenberga w 1934 roku. Zasada działania takiego dyfraktografu przedstawiona jest na rys. 6. Obraz dyfrakcyjny może tu być obserwowany i fotografowany, można także, przy użyciu odpowiedniego fotometru, dokonywać pomiaru jasności poszczególnych plamek i badać zależność tej jasności od energii elektronów, od kąta ich padania na powierzchnię kryształu i od temperatury kryształu.

5. Co dotąd odkryto przy pomocy dyfrakcji powolnych elektronów?

W ciągu ostatnich dwudziestu kilku lat na całym świecie wykonano i opublikowano tysiące prac wykorzystujących dyfrakcję powolnych elektronów do badania powierzchni kryształów. Ich szczegółowe przedstawienie, a nawet w miarę pełne wyliczenie poruszanych w nich problemów nie jest możliwe w krótkim artykule. Dlatego poniższe omówienie nie będzie oczywiście pełne, powinno ono jedynie dać czytelnikowi pewne wyobrażenie o kierunkach prowadzonych badań.

a) Struktura czystych powierzchni kryształów.

Metody badania struktury wnętrza kryształów oparte na wykorzystaniu dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego są dziś bardzo rozwinięte i wiedza o tej strukturze jest dość pełna. Metody te, ze względu na słabe oddziaływanie promieniowania rentgenowskiego z materią, nie pozwalają badać struktury powierzchni kryształu. Dyfrakcja powolnych elektronów pozwoliła stwierdzić, że dla szeregu kryształów, zwłaszcza kryształów metali, atomy na powierzchni ułożone są tak samo, jak na płaszczyźnie równoległej do tej powierzchni i znajdującej się wewnątrz kryształu. Wynik ten nie był oczywisty, gdyż liczba najbliższych sąsiadów atomu na powierzchni jest mniejsza od takiej liczby dla atomu wewnątrz i rozmieszczenie tych sąsiadów jest asymetryczne (nie ma ich na zewnątrz kryształu). Siły wiązania atomu na powierzchni są zatem inne, co powinno prowadzić do utworzenia na powierzchni struktury odmiennej niż wewnątrz. Tymczasem w wielu wypadkach obserwuje się jedynie kilkuprocentową zmianę odległości między atomami w kierunku prostopadłym do powierzchni.

Dla wielu innych kryształów (zwłaszcza dla półprzewodników, ale także i dla pewnych metali) stwierdzono rekonstrukcję powierzchni, polegającą na skomplikowanym przemieszczeniu atomów powierzchniowych zarówno w płaszczyźnie powierzchni jak i w kierunku do niej prostopadłym. W wielu przypadkach (na przykład dla kryształu krzemu) brakuje dotąd w naukowej literaturze zgodności co do struktury zrekonstruowanej powierzchni. Badania rekonstrukcji powierzchni są bardzo przydatne dla rozwoju teorii wiązań krystalicznych.

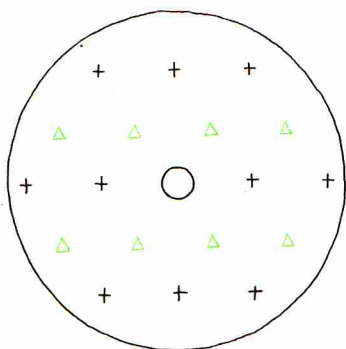
b) Struktura warstw adsorpcyjnych.

Adsorpcja obcych atomów na czystej i dobrze uporządkowanej powierzchni kryształu prowadzi bardzo często do utworzenia uporządkowanej struktury atomów adsorbentu. W obrazie dyfrakcyjnym pojawiają się wtedy nowe plamki oraz zmienia się natężenie plamek „starych”. Na przykład, przy adsorpcji siarki na jednej ze ścian kryształu niklu, na której atomy tworzą prostokątną sieć krystaliczną, w obrazie dyfrakcyjnym już przy małych pokryciach powierzchni adsorbentem pojawiają się dodatkowe plamki, zaznaczone na rys. 7 trójkątami.

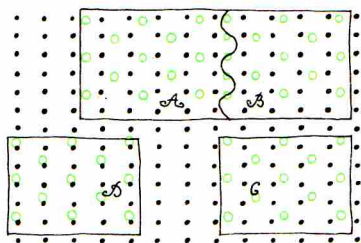


Rozwiązanie zadania F III.

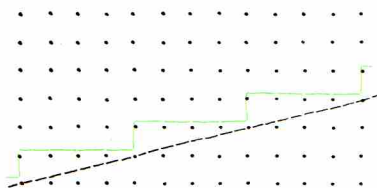
Woda, podobnie jak inne cieczki, jest bardzo mało ściśliwa. Wskutek bezwładności wody, jej powierzchnia nie zdąży unieść się w górę w czasie przebiegu małego, szybkiego pocisku. Nastąpi więc zmniejszenie objętości wody wzdłuż toru pocisku, co wywoła powstanie na chwilę bardzo wysokiego ciśnienia. Ciśnienie to przekazane przez resztę wody na ścianki skrzynki rozewnie ją na kawałki.



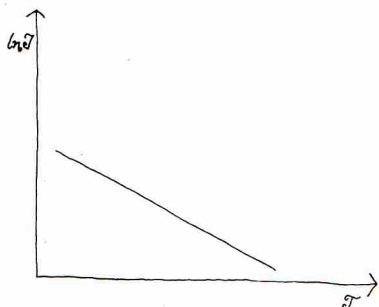
Rys. 7. Obraz dyfrakcyjny dla ściany kryształu niklu z atomami ułożonymi w sieć prostokątną. Krzyżykami zaznaczono plamki obserwowane przy dyfrakcji powolnych elektronów na czystej powierzchni, a trójkątami — plamki dodatkowe, pojawiające się przy adsorpcji siarki. Rozmiary obrazu ograniczone są wymiarami ekranu luminescencyjnego, małe kółko w środku obrazu przedstawia otwór w ekranie, przez który przechodzi pierwotna wiązka elektronów.



Rys. 8. Struktura atomów niklu (czarne kropki) dająca obraz dyfrakcyjny pokazany na rys. 7 i wyspy utworzone przez zaadsorbowane atomy siarki. W wyspach A i B atom siarki ma czterech najbliższych „niklowych” sąsiadów, w wyspie C — dwóch, a w wyspie D — jednego. W rzeczywistości rosną tylko wyspy typu A i B (patrz tekst). Granica zrostu wysp A i B tworzy defekt struktury.



Rys. 9. Przekrój kryształu z zaznaczoną linią cięcia wykonanego dla otrzymania ściany wycinalnej (linia przerywana) i ścianą wycinalną złożoną z tarasów i stopni (linia ciągła). Czarnymi kropkami zaznaczono widoczne w płaszczyźnie rysunku atomy tworzące kryształ.



Rys. 10. Zależność natężenia wiązki ugiętej od temperatury kryształu, wykreślona w skali półlogarytmicznej

$$\ln I = \ln I_0 - aT$$

(11)

Z nachylenia doświadczalnie znalezionej prostej można wyznaczyć stałą a , a stąd — efektywną temperaturę Debye'a.

Z rozmieszczenia tych plamek wynika, że na niklowym podłożu tworzą się wyspy zbudowane z regularnie ułożonych atomów siarki (rys. 8). Znajomość położenia dodatkowych plamek w obrazie dyfrakcyjnym nie pozwala rozstrzygnąć, jaką pozycję względem atomów podłoża (jakie miejsce adsorpcyjne) zajmują atomy siarki, każda bowiem z wysp pokazanych na rys. 8 powinna dawać obserwowane plamki dodatkowe. Problem ten można rozstrzygnąć mierząc zależność jasności poszczególnych plamek od energii elektronów i porównując tę zależność z zależnością obliczoną teoretycznie przy założeniu, że obsadzone są te lub inne miejsca adsorpcyjne. Takie porównania prowadzą do wniosku, że w omawianym przypadku atom siarki ma czterech najbliższych „niklowych” sąsiadów, czyli, że powstają wyspy typu „A” i „B”. Wzrost takich wysp prowadzi do ich zrastania się, przy czym linia zrostu jest defektem struktury warstwy adsorpcyjnej, jak to widać na rys. 8. Istnienie takich defektów powinno prowadzić, jak to można pokazać przy pomocy odpowiednich obliczeń, do rozdwojenia plamek dodatkowych w obrazie dyfrakcyjnym i rozdwojenie takie jest obserwowane przy całkowitym pokryciu siarką.

e) Struktura ścian wycinalnych.

Ścianą wycinalną kryształu nazywamy jego powierzchnię wyciętą w taki sposób, że tworzy ona mały kąt z płaszczyznami gęsto obsadzonymi przez atomy (rys. 9). Stwierdzono doświadczalnie, że kryształy różnych metali (np. platyny) ograniczone takimi ścianami mają interesujące własności katalityczne (na ścianach takich mogą przebiegać pewne wybrane i bardzo pożądane w praktycznych zastosowaniach reakcje chemiczne). Dla zrozumienia tych własności katalitycznych trzeba poznać strukturę ścian wycinalnych. Jak widać z rys. 9, ściana taka jest systemem tarasów oddzielonych stopniami. Stopnie te są defektami struktury powierzchni i ich istnienie prowadzi do rozszczepienia pewnych plamek w obrazie dyfrakcyjnym. Z wielkości tego rozszczepienia i z wartości energii elektronów, przy której ono występuje, można oszacować szerokość tarasów i wysokość stopni. Okazuje się, że wysokość stopni równa jest zwykle najbliższej odległości między atomami.

d) Badanie drgań cieplnych atomów powierzchniowych.

Drgania cieplne atomów znajdujących się na powierzchni kryształu powinny mieć większą amplitudę niż drgania atomów w jego objętości. Wynika to z braku sąsiadów od zewnątrz kryształu, a więc i braku części wiązań utrzymujących atom w położeniu równowagi. Pomiar zależności natężenia poszczególnych wiązek ugiętych od temperatury kryształu pozwala na wyznaczenie przy pomocy równania (11) stałej a występującej w tym równaniu, a więc i temperatury Debye'a wyznaczającej tę stałą. Nie będzie to temperatura Debye'a charakterystyczna dla wnętrza kryształu, lecz pewna średnia ważona temperatur Debye'a odpowiadających poszczególnym przypowierzchniowym warstwom atomów, nazywana efektywną temperaturą Debye'a. Największy wkład do tej średniej wnoszą pierwsza warstwa atomów, ale wpływ kolejnych warstw zwykle też nie może być zaniedbany. Z doświadczenia wiadomo, że efektywna temperatura Debye'a jest o kilkadziesiąt procent mniejsza od objętościowej (wewnętrznej) temperatury Debye'a. Oznacza to w każdym razie, że temperatura Debye'a odpowiadająca pierwszej warstwie atomów (powierzchniowa temperatura Debye'a) jest znacznie mniejsza od objętościowej temperatury Debye'a. Wynika stąd, że amplituda drgań cieplnych atomów powierzchniowych jest dużo większa od amplitudy drgań atomów wewnątrz kryształów. Wynik powyższy jest raczej jakościowy. Uzyskanie wiarygodnych danych ilościowych w tej dziedzinie napotyka istotne trudności, m. in. ze względu na brak łatwego sposobu oszacowania wpływu warstw głębszych na efektywną temperaturę Debye'a. Występują tu również inne trudności, których omawianie wykracza poza ramy niniejszego artykułu. Można, być może, tak dobrać warunki doświadczenia, że wkład warstw głębszych do dyfrakcji stanie się pomijalny i że inne, nie omówione tutaj trudności staną się mało istotne. Sprawdzenie tej możliwości jest jednak sprawą przyszłości.



Rozwiązanie zadania M 289.

Oznaczając przez a' i b' odległości wierzchołków A , B od dwusiecznej d_c kąta

C otrzymamy $\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}$, czyli $a'a = b'b$,

skąd wynika, że środek ciężkości opisanego w zadaniu układu mas leży na d_c (można się o tym przekonać rozpatrując taki układ współrzędnych, że d_c leży na jednej z osi).

Powtarzając powyższe rozumowanie otrzymamy, że poszukiwany środek ciężkości jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

Uwaga: Można stąd łatwo wywnioskować, że środkiem ciężkości obwodu $\triangle ABC$ jest obraz środka okręgu wpisanego

w jednokładności o współczynniku $-\frac{1}{3}$

o środku w środku ciężkości trójkąta ABC .

6. Uwagi końcowe

Wszystkie powyższe rozważania prowadzono posługując się skrajnie uproszczonymi modelami. Rozważano mianowicie tylko przypadek prostopadłego padania wiązki pierwotnej i bardzo mało i pobieżnie zajmowano się wkładem warstw głębszych do dyfrakcji. Zakładano również milcząco, że fala de Broglie'a jest uginana w kryształach tylko jeden raz, co znakomicie uprościło opis dyfrakcji. W rzeczywistości wielokrotne rozproszenie elektronów w kryształach jest bardzo istotne w dyfrakcji powolnych elektronów i musi być brane pod uwagę przy jej opisie. Dlatego współczesna teoria dyfrakcji powolnych elektronów jest bardzo skomplikowana, a interpretacja wyników otrzymywanych przy stosowaniu tej dyfrakcji do badania powierzchni kryształów rzadko bywa tak prosta, jak w przytoczonych wyżej przykładach. Dlatego niniejszy artykuł jest tylko bardzo elementarnym wstępem do tematu sformułowanego w jego tytule.

Poradnik dla Fibaka

czyli Matematyczna Teoria Tenisa

Matematyka jest dobra na wszystko. Oto wiadomo, że po pierwszym nieudanym serwie (po polsku: podaniu) wolno w tenisie serwować powtórnie. Wszyscy tenisisci biją więc pierwszy serwis silnie, bardziej ryzykownie. Drugi jest bardziej ścięty, spokojniejszy i już nie powinien wyjść na aut.

Może to nie jest najlepsza strategia? Może opłaciłoby się obydwie serwisy wykonywać mocno, ryzykownie, albo przeciwnie, obydwie słabsze? Stwórzmy matematyczny model sytuacji! Gracz ma do dyspozycji zbiór S sposobów serwowania: mocny i płaski, liftowany, z narożnika kortu, bliżej środka, itd... Z każdym podaniem s związane są dwa prawdopodobieństwa $p(s)$ i $q(s)$:
 $p(s)$ = prawdopodobieństwo, że serw jest udany,
 $q(s)$ = prawdopodobieństwo warunkowe: jeśli jest udany, to przyniesie punkt (lub choćby rozstrzygający atak).

Zatem $w(s) = p(s)q(s)$ jest prawdopodobieństwem wygrania punktu po podaniu s . Na ogół podania z większym p mają mniejsze q (im bardziej ryzykowny, tym trudniej go odebrać, jeśli wyjdzie).

Strategia składa się zatem z uporządkowanej pary $(s_1, s_2) \in S \times S$. „Sukces” to wygranie punktu. Jego prawdopodobieństwo wynosi

$$(1) \quad p(s_1, s_2) = w(s_1) + (1 - p(s_1))w(s_2).$$

Optymalna strategia powinna maksymalizować (1). Ponieważ nie ma trzeciego podania, więc s_2 musi przy tym maksymalizować $w(s)$. Oznaczmy to maksimum przez \bar{w} ; wtedy s_1 winno maksymalizować

$$(2) \quad w(s) - \bar{w}p(s).$$

Odlóżmy na dwu prostopadłych osiach p i w . Wyobraźmy sobie, że nasz gracz zna bardzo wiele sposobów serwowania i że układają się one w krzywą jak na rysunku obok. Każdy tenisista potwierdzi, że jest ona wypukła. Ponieważ s_2 maksymalizuje w , więc jest najwyższym punktem wykresu. Natomiast s_1 maksymalizuje $w(s) - \bar{w}p(s)$. Geometrycznie znaczy to, że s_1 jest punktem styczności krzywej z prostą L o współczynniku kierunkowym \bar{w} . Na rysunku obok mamy więc strategię: bij najpierw s_1 , potem s_2 . Proste? Proste!

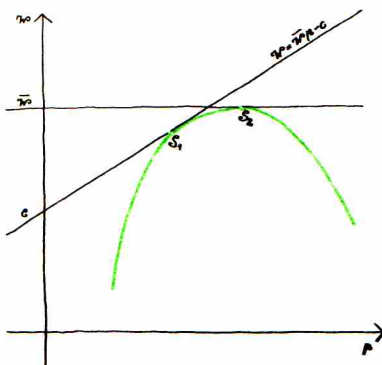
Udowodniliśmy matematycznie, że opłaca się bić pierwszy serwis ryzykownie a drugi spokojnie. Wiedzieliśmy to już przedtem, ale teraz to już ho-ho!

Dla mniej wprawnych graczy nasza teoria też jest dobra. Wyobraźmy sobie, że ma on do dyspozycji tylko dwa sposoby serwowania: s_1 i s_2 o współrzędnych (p_1, w_1) i (p_2, w_2) . Wówczas (łatwe obliczenia pomijamy): (s_1, s_2) jest optymalną strategią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_2 \geq w_1 \geq w_2(1 - (p_2 - p_1)).$$

Gdy pierwsza nierówność nie zachodzi, należy serwować dwa razy s_1 , gdy druga — dwa razy s_2 . Co z tego wszystkiego wynika dla poziomu naszych umiejętności w białym sporcie? Dokładnie nic. Czy wobec tego te rozważania były całkiem bezużyteczne? Być może, natomiast autorowi tej notatki nieodparcie przypominały matematyczne podstawy ekonomii politycznej.

(M. Sz.)



Tak należy serwować.