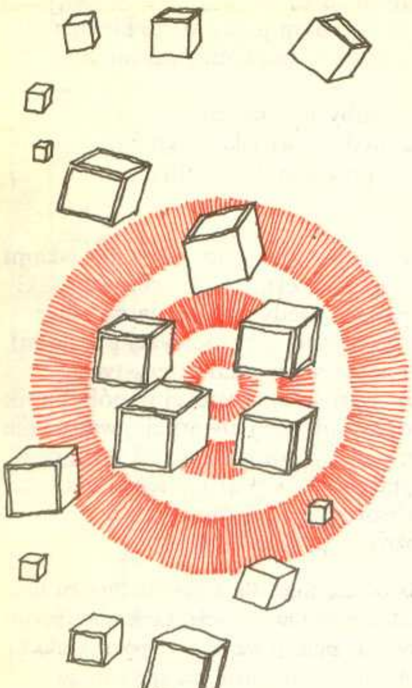
Patrz w niebo



Późnym wieczorem nad wschodnim horyzontem pojawiają się już w lutym wiosenne gwiazdozbiory, m.in. Wolarz (*Bootes*) z najjaśniejszą gwiazdą Arkturem (opisaliśmy ją w majowym numerze z 1980 r.). Niedaleko Arktura świeci słaba gwiazdka, niewidoczna gołym okiem, 8 wielkości gwiazdowej, o prozaicznej nazwie HD 128220. Zajmiemy się dzisiaj nią bliżej.

W poprzednich odcinkach „Patrz w niebo" często opisywaliśmy gwiazdy supernowe i pozostałości po nich. Wspominaliśmy o wybuchach supernowych z 1054 i 1572 roku, mówiąc, że wybuch taki potrafimy już dość dobrze jakościowo opisać teoretycznie. Ale skoro tak, to powinniśmy zbliżać się do momentu, kiedy będziemy potrafili prognozować zachowanie się gwiazd i przewidywać ich ewentualne wybuchy. Jesteśmy tu chyba bliżej celu niż geofizycy, którzy ciągle mają kłopoty z przewidywaniem trzęsień ziemi i wybuchów wulkanów (jest to zrozumiałe, bo praktycznie jest to trudniejsze). A więc postawmy pytanie: czy potrafimy wskazać gwiazdę, która będzie następną obserwowaną supernową w naszej Galaktyce?

Odpowiedź właściwie powinna brzmieć: nie, nie potrafimy, ponieważ nie zbadaliśmy dostatecznie wielu słabych gwiazd. Jasność gwiazdy w momencie wybuchu rośnie miliony razy, a więc powinniśmy co najmniej pobieżnie przejrzeć wszystkie gwiazdy do 16 a nawet do 20 wielkości gwiazdowej. Takich gwiazd są w naszej Galaktyce miliardy. W naszych katalogach jest mniej niż pół miliona najjaśniejszych z nich.

Postawmy więc nieco inne pytanie: która z gwiazd przebadanych przez nas ma największe szanse rychłego wybuchu? Takich kandydatów podano już wiele, m.in. czerwone olbrzymy: zimowy *Betelgeuse* z Oriona i letnia gwiazda *Deneb* z Łabędzia. Chyba jednak największe szanse z dobrze znanych gwiazd ma właśnie wspomniana na wstępie HD 128220.

Jest to układ podwójny (o okresie orbitalnym 870 dni) składający się z zimnego (typu *G*) olbrzyma i z bardzo gorącego podkarła typu *O*. Składnik typu *O* ma ok. 2—3 masy Słońca i jest właśnie tym kandydatem. Prawdopodobnie wypalił on już cały wodór w swoim wnętrzu, przeszedł przez fazę czerwonego olbrzyma i obecnie powoli zapada się, będąc już mniejszym niż Słońce.

To zapadanie musi skończyć się wybuchem supernowej właśnie ze względu na dość dużą masę gwiazdy. Gdyby jej masa była mniejsza niż ok. 1.4 $M_{\odot}$, mogłoby się skończyć na niczym, to znaczy na spokojnym przejściu do fazy białego karła.

W tej sytuacji jednak siły grawitacyjne są tak duże, że zapadanie to zostanie bardzo gwałtownie zatrzymane (prawdopodobnie) dopiero przez gwałtowny wzrost ciśnienia gazu neutronowego. W momencie zrównoważenia się tych sił powierzchnia gwiazdy będzie zapadać się już z prędkością porównywalną z prędkością światła. To musi się zakończyć potężnym wybuchem.

A więc obserwujcie Wolarza, w ciągu najbliższego miliona lat HD 128220 może zajaśnieje bardziej niż Księżyc w pełni.

(na podstawie *Mercury*, Vol. X, No 2, 1981)

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 16, 17, 18

Termin nadsyłania rozwiązań: do 30. VI. 1982 r.

16. Czy ciąg $\{x_n\}$ liczb całkowitych nieujemnych spełniający warunek $x_{mn} = x_m + x_n$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$ może być ściśle rosnący?

17. Udowodnić, że na brzegu dowolnego wielokąta wypukłego można znaleźć cztery punkty będące wierzchołkami kwadratu.

18. Spośród wierzchołków sześcianu o krawędzi jednostkowej wybrano losowo trzy (każdy wybór jednakowo prawdopodobny). Pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

(Zadanie 16 przysłał nasz Czytelnik *Jarosław CEL*, uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego w Końskich).

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szki c rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami· Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Rozwiązania zadań z numeru 10/1981

4. Prostego dowodu dostarcza teoria wielomianów w dziedzinie zespolonej. Rozłóżmy wielomian W na czynniki liniowe i zgrupujmy oddzielnie czynniki odpowiadające pierwiastkom leżącym w górnej półpłaszczyźnie, w dolnej półpłaszczyźnie i na osi rzeczywistej. Otrzymamy rozkład $W(z) = W_1(z)\,W_2(z)\,W_3(z)$. Pierwiastki nierzeczywiste można poustawiać w pary liczb wzajemnie sprzężonych (jeśli z_0 jest pierwiastkiem to $\bar{z}_0$ też, i to tej samej krotności). Zatem dla x rzeczywistych $W_2(x) = \overline{W_1(x)}$. Wobec założenia $W(x) \geqslant 0$ wszystkie pierwiastki rzeczywiste są parzystej krotności, a więc wielomian W_3 jest kwadratem pewnego wielomianu W_4 (o współczynnikach rzeczywistych). Mamy zatem (dla x rzeczywistych) przedstawienie

$$W(x) = W_1(x)\,W_2(x)\,W_4(x)^2 = W_1(x)\,W_4(x)\cdot\overline{W_1(x)\,W_4(x)},$$

a stąd, pisząc $W_1(x)\,W_4(x) = P(x)+iQ(x)$, dostajemy

$$W(x) = (P(x)+iQ(x))\,(P(x)-iQ(x)) = P(x)^2+Q(x)^2.$$

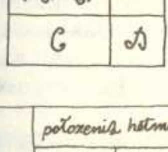
5. Wyrazy ciągów a_n i b_n spełniają układ równań:

$a_{n+1}^2 = b_n^2$, $a_n^2+b_n^2 = b_{n+1}^2$. Dzieląc pierwsze z nich przez b_{n+1}^2 a drugie przez b_n^2, a następnie mnożąc stronami otrzymane równania, dostajemy dla stosunku $x_n = a_n^2/b_n^2$ wzór rekurencyjny $x_{n+1}(1+x_n) = 1$. Stąd widać, że jeśli granica $\lim x_n$ istnieje, to jest ona pierwiastkiem dodatnim równania $x(1+x) = 1$, czyli jest równa liczbie $\xi = (\sqrt{5}-1)/2$ (nie zależy więc od wartości a_1, b_1). Stosując otrzymaną formułę rekurencyjną dwukrotnie, znajdujemy wzór na przejście od x_n do x_{n+2}: $x_{n+2} = f(x_n)$, gdzie $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$. Dla dowolnego dodatniego x wartość $f(x)$ leży między x a ξ (sprawdzamy to łatwym rachunkiem, bądź też analizując wykres funkcji f). Wynika stąd, że ciągi $\{x_{2k}\}$ i $\{x_{2k+1}\}$ są monotoniczne i ograniczone, więc zbieżne. Granica każdego z nich spełnia równanie $x = f(x)$. Ponieważ liczba ξ jest jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania, zatem jest ona wspólną granicą obu wymienionych ciągów, a więc i granicą ciągu $\{x_n\}$.

6. Liczba wszystkich możliwych ustawień na szachownicy $n\times n$ pary hetmanów (rozróżnialnych — najpierw stawiamy białego, potem czarnego) równa się $M_n = n^2(n^2-1)$. Niech L_n oznacza liczbę wszystkich takich ustawień, przy których hetmany atakują się. Szukane prawdopodobieństwo

$$P_n = 1-\frac{L_n}{M_n}.$$

Znajdziemy wzór indukcyjny na L_n. Ustalmy n i podzielmy szachownicę $(n+1)\times(n+1)$ na obszary A, B, C, D, jak na rysunku (obszar D to pojedyncze pole). Liczymy ustawienia szachujące: Suma liczb napisanych w okienkach tabelki wynosi L_{n+1}. Zatem $L_{n+1} = L_n+10n^2+2n$. Będziemy szukać przedstawienia L_n jako funkcji wielomianowej zmiennej n; musi to być wielomian trzeciego stopnia. Z wzoru rekurencyjnego i z równości $L_2 = 12$ dostajemy układ równań na współczynniki, który po rozwiązaniu daje $L_n = \dfrac{10}{3}n^3-4n^2+\dfrac{2}{3}n$. Stąd po krótkich rachunkach $P_n = \dfrac{(n-2)(3n-1)}{3n(n+1)}$.



Liczba ustawień szachujących		położenia hetmana białego		
		A	B∪C	D
położenia hetmana czarnego	A	L_n	$2n(2n-1)$	n
	B∪C	$2n(2n-1)$	$2n^2$	$2n$
	D	n	$2n$	0