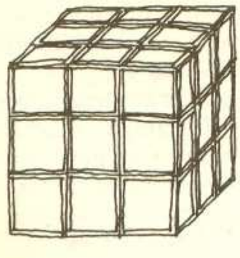
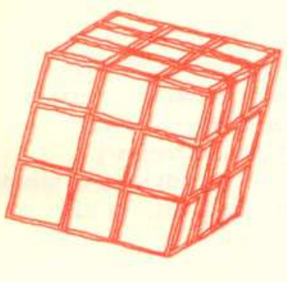
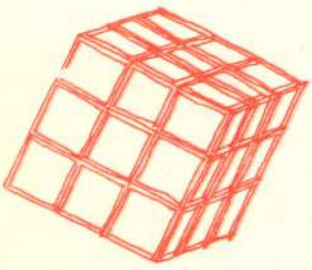
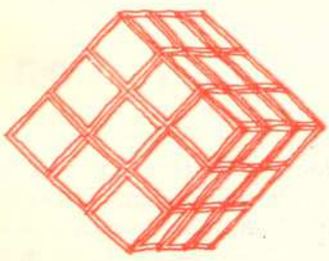
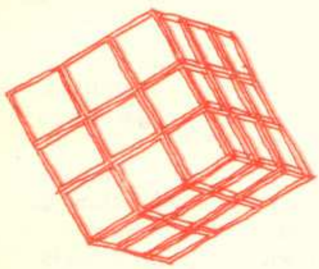










Długie ciągi

Dr Zbigniew SAWOŃ

Nie trzeba uzasadniać znaczenia pojęcia *granicy ciągu* w Analizie Matematycznej. Pobieżny nawet przegląd definicji występujących w tej dziedzinie matematyki prowadzi do wniosku, że u ich podstaw leży pojęcie granicy. W artykule tym przedstawimy pewne uogólnienia tego pojęcia. Mogą one iść w dwu kierunkach. Pierwszy z nich — to rozszerzenie pojęcia zbieżności na znacznie szerszą klasę ciągów liczbowych. Można np. uznać, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w „szerszym sensie'' lub, że ma uogólnioną granicę $\operatorname{Lim} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica średnich arytmetycznych

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n$$

i łatwo wówczas zauważyć, że:

1) każdy ciąg zbieżny jest zbieżny w „szerszym sensie'',

2) istnieją ciągi rozbieżne, ale zbieżne w „szerszym sensie'' np. ciąg $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

Tego typu uogólnienia są przedmiotem badań teorii zwanej Teorią Limesowalności i nie będą rozważane w tym artykule. Warto jednak zaznaczyć, że piękną kartę w Teorii Limesowalności zapisali polscy matematycy, w szczególności profesorowie Stanisław Mazur, Władysław Orlicz i ich uczniowie.

Drugi kierunek, w jakim mogą iść uogólnienia, to przyporządkowanie granicy szerszym klasom funkcji. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest, jak Czytelnikom dobrze wiadomo, funkcją

$$f: N \to R,$$

gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych i $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Niech T będzie dowolnym zbiorem i niech $f: T \to R$ będzie funkcją określoną na T (T nazywać będziemy zbiorem indeksów). Spróbujemy zdefiniować symbol

$$\lim_T f(t).$$

Jeżeli np. $T = N$ lub $T = [0,1)$ to symbole $\lim f(t)$ mamy już określone w następujący sposób:

Gdy $T = N$ to

$$a = \lim_N f(n) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon$$

(zwykła zbieżność ciągu liczbowego).

Gdy $T = [0,1)$ to

$$a = \lim_{[0,1)} f(t) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{t_0\in[0,1)} \bigwedge_{t\in[0,1)} t \geqslant t_0 \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon.$$

Oczywiście w tym przypadku a jest granicą lewostronną

$$a = \lim_{t\to 1-0} f(t)$$

Przyglądając się tym obu definicjom stwierdzamy z łatwością, że ich wprowadzenie było możliwe dzięki temu, iż w zbiorze $T = N$, jak i w zbiorze $T = [0,1)$ jest relacja porządku $\leqslant$.

Niech T będzie zbiorem indeksów wyposażonym w relację porządku $\leqslant$, tj. w relację dwuargumentową $x \leqslant y$ spełniającą następujący układ aksjomatów:

1) Dla każdego $x, y \in T$ albo $x \leqslant y$ albo $y \leqslant x$,

2) jeżeli $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, to $y = x$,

3) dla każdego $x \in T$ zachodzi $x \leqslant x$,

4) jeżeli $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, to $x \leqslant z$.

Teraz już z łatwością można zdefiniować

$$(*) \qquad a = \lim_{(T;\leqslant)} f(t) \equiv \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{t_0\in T} \bigwedge_{t\in T} t_0 \leqslant t \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon.$$

Rozwiązanie zadania M 287. Oznaczając $x_1 = \cos t_1$, $x_2 = \cos t_2$ mamy ze wzorów Viete'a

$x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 x_2 = c/a$,

$y_1 = \cos 2t_1 = 2x_1^2 - 1$, $y_2 = \cos 2t_2 = 2x_2^2 - 1$,

a ponieważ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$,

więc

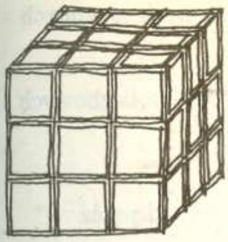
$y_1 + y_2 = 2((b/a)^2 - 2c/a - 1)$,

$y_1 y_2 = 4(c/a)^2 - 2((b/a)^2 - 2c/a) + 1$

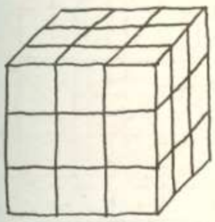
i możemy przyjąć

$A = a^2$, $B = 2(a^2 + 2ac - b^2)$,

$C = 4(c^2 + ac) - 2b^2 + a^2 = (2c + a)^2 - 2b^2$.



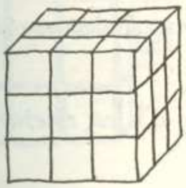
Praktyka Analizy Matematycznej wymaga określenia pojęcia $\lim_T f(t)$ dla zbioru indeksów T, w którym nie ma struktury porządku. W szczególności rozpatruje się zbiory T wyposażone w relację dwuargumentową $\leqslant$ spełniające tylko aksjomaty **2**, **3**, **4**. Taką relację nazywamy relacją częściowego porządku.
Spróbujmy powtórzyć definicję (*) dla zbioru T z częściowym porządkiem. Okazuje się, że definicja taka nie będzie poprawna. Najlepiej wyjaśni to następujący przykład: Niech $T = [0, 1)$. Podzielmy ten przedział na dwie części $T_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ i $T_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Punkty przedziałów T_1 i T_2 są uporządkowane w sposób naturalny, natomiast uznajmy, że żaden punkt przedziału T_2 nie jest porównywalny z żadnym punktem przedziału T_1 i na odwrót. Oznaczmy taką relację przez $\prec$. Oczywiście zbiór $(T; \prec)$ jest częściowo uporządkowany. Ale biorąc np. funkcję $f(t) = t$ stwierdzamy, że zgodnie z definicją (*) mamy



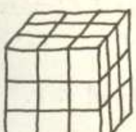
$$\lim_{(T,\prec)} f(t) = \frac{1}{2} \quad \text{ale także } \lim_{(T,\prec)} f(t) = 1.$$

Struktura częściowego porządku nie zapewnia więc nam jednoznaczności granicy, potrzebny jest jakiś warunek dodatkowy. Można tego dokonać żądając:

5) dla każdego $x, y \in T$ istnieje takie $z \in T$, że $x \leqslant z$ i $y \leqslant z$.
Zbiór $(T, \leqslant)$ z częściowym porządkiem $\leqslant$ spełniającym aksjomat (**5**) nazywamy zbiorem *skierowanym* i (o czym może się Czytelnik z łatwością przekonać) w tym przypadku granica $\lim_{(T,\leqslant)} f(t)$ jest wyznaczona jednoznacznie.



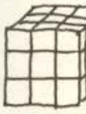
Reasumując:
Definicję (*) *można stosować w przypadku, gdy* $(T, \leqslant)$ *jest zbiorem skierowanym.*
Przykłady:
I) Niech T będzie zbiorem par liczb naturalnych, tj. $T = N \times N$. Relację częściowego porządku w T zdefiniujemy w następujący sposób



$$(m_1, n_1) \leqslant (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \leqslant m_2 \quad \text{i} \quad n_1 \leqslant n_2.$$

Oczywiście $(T, \leqslant)$ jest zbiorem skierowanym. Funkcje $f: N \times N \to R$ to inaczej mówiąc ciągi podwójne $a_{m,n}$, $m, n = 1, 2, \ldots$. Od razu stwierdzamy, że

$$a = \lim_{(T,\leqslant)} a_{m,n} \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{(m_0,n_0)} \bigwedge_{(m,n)} m \geqslant m_0 \text{ i } n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_{m,n} - a| < \varepsilon.$$



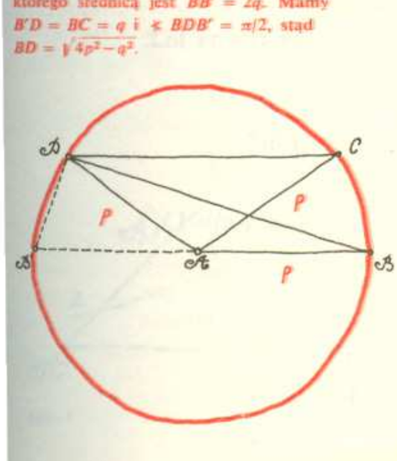
W ten sposób definiujemy zbieżność ciągów podwójnych $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$.
W zbiorze $T = N \times N$ możliwy jest też inny częściowy porządek, a mianowicie

$$(m_1, n_1) \leqslant_1 (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_2 = n_2 \text{ i } m_2 \geqslant \frac{m_1 + n_1}{2}.$$

$(T, \leqslant_1)$ jest także zbiorem skierowanym oraz

$$a = \lim_{(T,\leqslant_1)} a_{m,n} \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n} n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_{n,n} - a| < \varepsilon.$$

Rozwiązanie zadania M 288. Punkty B, C, D leżą na okręgu o środku w A i promieniu p, którego średnicą jest $BB' = 2q$. Mamy $B'D = BC = q$ i $\sphericalangle BDB' = \pi/2$, stąd $BD = \sqrt{4p^2 - q^2}$.



Zatem w tym przypadku „zbieżność'' ciągu podwójnego $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ oznacza po prostu zwykłą zbieżność ciągu przekątniowego $(a_{n,n})_{n=1}^{\infty}$.
Widać dalej, że jeżeli ciąg podwójny $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w sensie $(T, \leqslant)$, to jest zbieżny w sensie $(T, \leqslant_1)$ oraz obie granice są równe

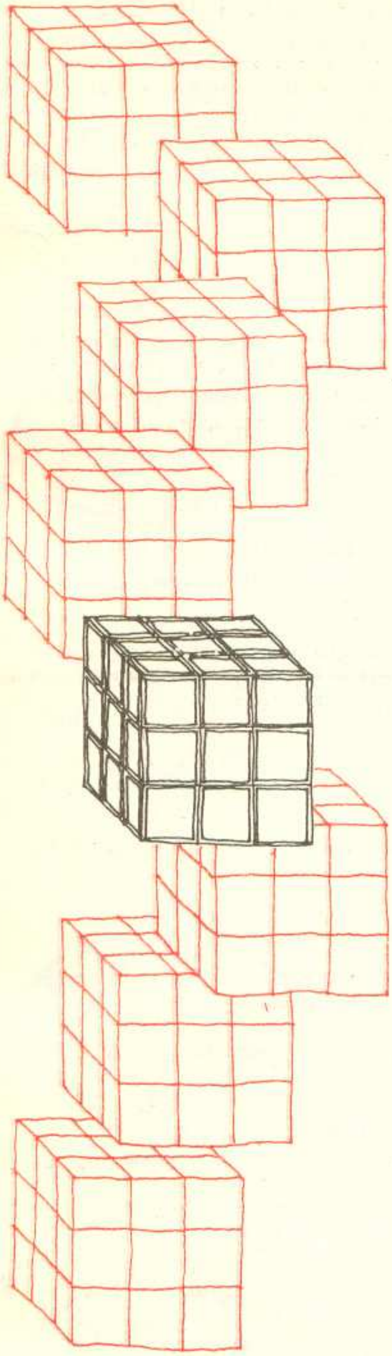
$$\lim_{(T,\leqslant)} a_{m,n} = \lim_{(T,\leqslant_1)} a_{m,n}.$$

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe. Świadczy o tym następujący przykład:

$$\text{Niech} \qquad a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \leqslant m \\ (-1)^n & \text{dla } n > m. \end{cases} \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

Oczywiście $\lim_{(T,\leqslant_1)} a_{m,n} = 0$, zaś $\lim_{(T,\leqslant)} a_{m,n}$ nie istnieje (dlaczego?).

Z powyższego przykładu wynika, że na tym samym zbiorze T można otrzymać różne rodzaje zbieżności różnie go „kierując''. Podstawowe znaczenie ma w związku z tym pytanie: kiedy takie dwa porządki skierowane wyznaczają tę samą zbieżność? Odpowiedź na to pytanie wykracza poza ramy tego artykułu.



II) Oznaczmy przez Ω_0 rodzinę wszystkich podzbiorów skończonych złożonych z liczb naturalnych:
$\Omega_0 = \{\Delta \subset N; \Delta \text{ jest zbiorem skończonym}\}$.
Będziemy też rozpatrywać zbiór Ω_1 wszystkich przedziałów całkowitoliczbowych $[1, 2, 3, \ldots, n]$, tj.
$\Omega_1 = \{\Delta = \Delta_n \subset N; \Delta_n = [1, n], n = 1, 2, \ldots\}$,
gdzie $[1, n] = \{k \in N; 1 \leqslant k \leqslant n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Oczywiście zbiory Ω_0 i Ω_1 są zbiorami częściowo uporządkowanymi przez relację zawierania $\subset$. Są także zbiorami skierowanymi.
Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Dla każdego $\Delta \in \Omega_0$ lub $\Delta' \in \Omega_1$ oznaczmy

$$f(\Delta) = \sum_{i \in \Delta} a_i \quad \text{(jest to suma skończona).}$$

Określiliśmy więc funkcje $f: \Omega_0 \to R$ i $f: \Omega_1 \to R$.
Postawmy pytanie: kiedy istnieją granice uogólnione

$$\lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta); \quad \lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta').$$

Rozpatrzmy najpierw zbiór Ω_1. Jeżeli $\Delta' = \Delta'_n$, to $f(\Delta'_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, a więc $f(\Delta'_n)$ jest n-tą sumą częściową szeregu $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ i odpowiedź brzmi następująco:

Granica $\lim\limits_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta')$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ *jest zbieżny i wówczas* $\lim\limits_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dla Ω_0 mamy

$$a = \lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\Delta_0 \subset \Omega_0} \bigwedge_{\Delta \in \Omega_0} \Delta_0 \subset \Delta \Rightarrow |f(\Delta) - a| < \varepsilon.$$

Δ_0 jest zbiorem skończonym. Oznaczmy przez n_0 największą liczbę naturalną należącą do Δ_0. Wówczas dla każdego $n \geqslant n_0$ mamy $\Delta'_n \supset \Delta_0$.
A więc otrzymaliśmy, że

1) $\lim\limits_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta')$ istnieje,

2) $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Weźmy teraz pod uwagę szereg zbieżny o wyrazach $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.
Oczywiście w tym przypadku

$$\lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Przypuśćmy, że istnieje granica $\lim\limits_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta)$. Musi być ona równa $\ln 2$.
Istnieje więc takie $\Delta_0 \in \Omega_0$, że dla każdego $\Delta \supset \Delta_0$

$$|f(\Delta) - \ln 2| < 1 \text{ lub } |f(\Delta)| < 1 + \ln 2.$$

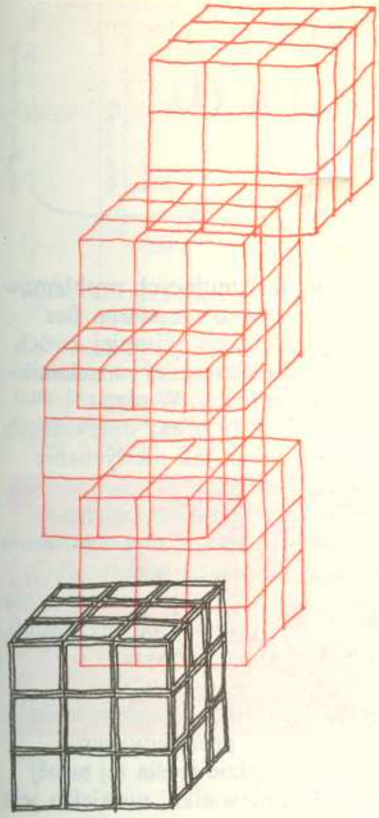
Niech

$$\Delta_n = \Delta_0 \cup \{2n_0 + 1; 2(n_0 + 1) + 1; \ldots 2(n_0 + n) + 1\},$$

oczywiście $\Delta_n \supset \Delta_0$, więc $|f(\Delta_n)| < 1 + \ln 2$.
Ale

$$f(\Delta_n) = f(\Delta_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2(n_0 + i) + 1}.$$

Rozwiązanie zadania **M 286**.
Jeżeli dwa hetmany stoją w tym samym rzędzie poziomym albo pionowym, to nie może w nim stac trzeci hetman. Jeżeli dwa hetmany stoją na tej samej linii ukośnej, to w żadnym z czterech odpowiadających rzędów nie może być trzeciego hetmana. Rzędów jest 16, więc hetmanów spełniających warunki zadania może być co najwyżej 16/3 par, czyli 10. Przykładowe ustawienie: a5, b2, c5, d1, d3, e6, e8, f4, g5, h4.



Zatem dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ mielibyśmy

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2(n_0+i)+1} \leqslant 1+\ln 2+|f(\Delta_0)|,$$

a to jest niemożliwe, czyli $\lim\limits_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta)$ nie istnieje!

Można wykazać i nie jest to trudne, że

$$\lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta) \text{ istnieje } \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób bardzo ciekawą charakteryzację szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Modyfikując nieco metodę zastosowaną powyżej Czytelnik z łatwością udowodni powyższe twierdzenie, tym bardziej że Autor na zakończenie podpowie mu następujący fakt:

Niech $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ będzie szeregiem liczbowym. Oznaczmy

$$\Delta' = \{n\colon a_n \geqslant 0\}, \qquad \Delta'' = \{n\colon a_n < 0\}.$$

Wówczas $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n\in\Delta'} a_n = +\infty, \qquad \sum_{n\in\Delta''} a_n = -\infty$$

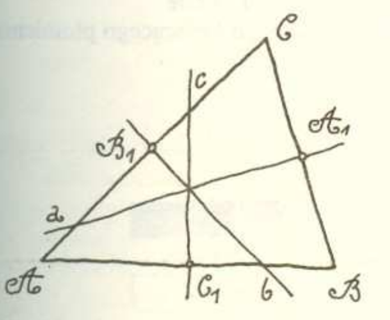
Zadania, których nie umiemy rozwiązać (II)

Przypominamy, że w tym kąciku zamieszczamy zadania z geometrii, których nie umiemy rozwiązać, oraz nadesłane przez Czytelników rozwiązania. Zamieszczamy także nadsyłane przez Czytelników zadania z geometrii, których Czytelnicy nasi nie umieją rozwiązać, o ile i my nie umiemy sobie z nimi poradzić.

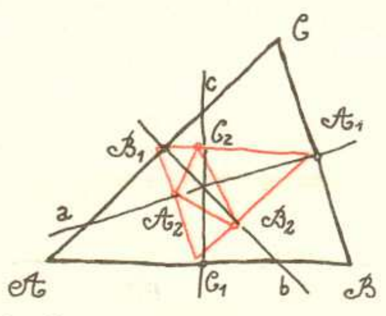
Proponowanego dzisiaj zadania nie tylko nie umiemy rozwiązać, ale nawet nie umiemy dokładnie sprecyzować.

Weźmy na początek dowolny, ostrokątny trójkąt $\Delta\, ABC$. Niech a, b, c będą symetralnymi jego boków, a punkty A_1, B_1, C_1 środkami tych boków (rys. 1). Wtedy proste a, b, c są wysokościami w trójkącie $\Delta\, A_1B_1C_1$. Jest to wystarczająco oczywiste, by nie przytaczać tu dowodu. Niech punkty A_2, B_2, C_2 będą spodkami wysokości w trójkącie $\Delta\, A_1B_1C_1$. Wtedy z kolei proste a, b, c są dwusiecznymi kątów wewnętrznych w trójkącie $\Delta\, A_2B_2C_2$ (rys. 2). Nietrudny dowód tego faktu opiera się na tym, że na każdym z czworokątów $C_1A_2C_2A_1$ i $C_1B_2C_2B_1$ można opisać okrąg. W podobny sposób tworzymy trójkąty $\Delta\, A_nB_nC_n$ dla $n = 3, \ldots$ (rys. 3). I tu chcieliśmy postawić to niezbyt precyzyjne pytanie: czy można coś ciekawego powiedzieć o roli prostych a, b, c w trójkątach $\Delta\, A_nB_nC_n$? Niekoniecznie zresztą wszystkich. Czekamy na propozycje.

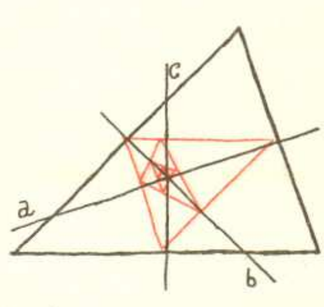
PROOF



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3