# Liczba rzeczywista jako granica ciągu liczb wymiernych

Wiadomo, że każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych. Udowodnimy to twierdzenie.
Można skonstruować ciąg liczb wymiernych zbieżny do liczby $\sqrt{2}$, na przykład tak:
Niech $a$ będzie dowolną liczbą wymierną większą od $\sqrt{2}$.
Przyjmijmy, że $a$ jest pierwszym wyrazem ciągu.
Rozważmy liczbę $\frac{a^2+2}{2a}$. Widać, że jest to liczba wymierna. Pokażemy, że

$$\sqrt{2} < \frac{a^2+2}{2a} < a \tag{1}$$

i liczbę $\frac{a^2+2}{2a}$ uznamy za drugi wyraz ciągu.
Przekształcając nierówności (1) w sposób równoważny otrzymujemy
1°. $a^2-2a\sqrt{2}+2 > 0$, $(a-\sqrt{2})^2 > 0$, $a \neq \sqrt{2}$ — prawda,
2°. $a^2+2 < 2a^2$, $a^2 > 2$, $a > \sqrt{2}$ — prawda.
Zatem nierówności (1) zostały udowodnione. Z nierówności tych widać, że mając liczbę wymierną $a > \sqrt{2}$ możemy otrzymać liczbę wymierną leżącą pomiędzy liczbą $\sqrt{2}$ i liczbą $a$ w sposób następujący: $\frac{a^2+2}{2a}$. Mając zaś liczbę wymierną $\frac{a^2+2}{2a}$ możemy otrzymać liczbę wymierną leżącą pomiędzy liczbą $\sqrt{2}$ i liczbą $\frac{a^2+2}{2a}$ w sposób następujący: $\frac{\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)^2+2}{2\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)}$ itd.
Otrzymujemy ciąg nieskończony liczb wymiernych. Ciąg ten możemy zdefiniować tak:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Z uwagi na to, że ciąg ten jest malejący i ograniczony z dołu (przez $\sqrt{2}$), więc jest zbieżny.
Oznaczmy granicę tego ciągu przez $g$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{2a_n}. \tag{2}$$

Skoro $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, więc $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$. Zatem z równości (2) otrzymujemy:

$$g = \frac{g^2+2}{2g}, \quad \text{skąd } g = \sqrt{2}.$$

Można wskazać inny ciąg liczb wymiernych zbieżny do $\sqrt{2}$. Np.

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n^2+2} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $a$ jest dowolną liczbą wymierną taką, że $0 < a < \sqrt{2}$.
Dowód, że ciąg ten jest zbieżny do $\sqrt{2}$, przebiega analogicznie jak w przykładzie ciągu poprzedniego.
Mało to jednak cieszy, bo nie widać jak można by stosować taką metodę do dowolnej liczby niewymiernej np. $\pi$. Trzeba więc poszukać innej metody.
W tym celu weźmy pod uwagę funkcję $[x]$ przyporządkowującą dowolnej liczbie $x$ największą z liczb całkowitych nie większych od $x$. Łatwo dostrzec, że dla dowolnej liczby $x$ jest:

$$x-1 < [x] \leqslant x.$$

Biorąc jako $x$ liczbę $n\alpha$, gdzie $\alpha$ jest dowolną liczbę rzeczywistą otrzymujemy

$$n\alpha-1 < [n\alpha] \leqslant n\alpha,$$

$$\alpha-\frac{1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leqslant \alpha.$$

Stąd na podstawie twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$.
A więc do dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha$ zbieżny jest ciąg liczb wymiernych o wyrazie ogólnym $\frac{[n\alpha]}{n}$.

*mgr Robert HAJŁASZ*