Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr **13**, **14**, **15**

Termin nadsyłania rozwiązań: 31. 5 .1982 r.

13. Dla jakich wartości $a > 1$ ciąg $a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}}, \ldots$, jest zbieżny?

14. Wyprowadzić wzór wyrażający pole trójkąta przez długości jego trzech wysokości.

15. Samochodem przez pustynię. Samochód może zabrać tylko jedną baryłkę paliwa, co wystarcza na przejechanie połowy drogi przez pustynię. Jaka jest minimalna ilość paliwa wystarczająca do przebycia całej drogi? Zakładamy, że można po drodze odlewać (i magazynować, a potem w stosownej chwili zabierać) dowolną ilość paliwa.

Klub 44

Rozwiązania zadań 1, 2, 3 z numeru 9/1981

1. Sprowadźmy składniki rozważanej sumy do wspólnego mianownika:

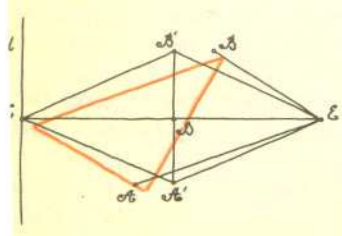
$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{L_1+L_2+\ldots+L_n}{M}=\frac{L}{M},$$

gdzie M jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $1, 2, \ldots, n$. Niech k będzie taką liczbą naturalną, że $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Spośród liczb $j = 1, 2, \ldots, n$ tylko jedna (mianowicie $j = 2^k$) dzieli się przez 2^k, wobec czego wszystkie liczniki L_j o numerach $j \neq 2^k$ są liczbami parzystymi. Natomiast licznik L_{2^k} jest liczbą nieparzystą. Zatem liczba $L = \Sigma L_j$ jest nieparzysta i iloraz L/M nie może być liczbą całkowitą.

2. Podane zdanie nie jest prawdziwe. Kontrprzykład: niech $PQRS$ będzie kwadratem o boku PQ leżącym na odcinku AB, przy czym $AP = PQ = QB$, i niech $Z = \{P, Q, R, S\}$. Wówczas najkrótszą drogą od A do B jest łamana $APSRQB$, natomiast drogą „najmniej krętą" (w sensie określonym w zadaniu) jest łamana $ASRPQB$.

3. Objętość rozpatrywanej bryły obrotowej wyraża się wzorem: (*) $V = 2\pi rS$, gdzie S jest polem obracanego trójkąta, a r — odległością jego środka ciężkości od osi obrotu. Jest to znana *reguła Guldina* — słuszna nie tylko wtedy, gdy obracana figura jest trójkątem — ale dla trójkąta dowodzi się ją łatwo, zauważając, że badana bryła jest różnicą stożka ściętego i dwóch stożków zwykłych. Przy ustalonym kształcie trójkąta objętość (*) jest więc największa, gdy oś obrotu przechodzi przez wierzchołek leżący najdalej od środka ciężkości i jest prostopadła do środkowej wychodzącej z tego wierzchołka. Niech więc ABC będzie dowolnym trójkątem o obwodzie 1; załóżmy, że CD jest jego najdłuższą środkową i obierzmy jako oś obrotu, zgodnie z poprzednią uwagą, taką prostą l, że $C \in l \perp CD$. Pokażemy, że jeśli $AC \neq BC$, to można znaleźć trójkąt równoramienny o obwodzie 1 o wierzchołku w punkcie C, dla którego wielkość (*) jest większa, niż dla trójkąta ABC.

Oznaczmy przez A' i B' punkty określone przez warunki: $AA' \| CD \| BB'$, $A'D \perp CD \perp B'D$ (rysunek). Pola trójkątów ABC i $A'B'C$ są równe, zaś obwód trójkąta $A'B'C$ jest mniejszy od 1, bowiem $A'B' < AB$ oraz $A'C+B'C < AC+BC$ (co najłatwiej zauważyć uzupełniając trójkąt ABC do równoległoboku $BCAE$, o obwodzie większym od obwodu rombu $B'CA'E$). Oddalając teraz punkty A' i B' od prostej l o stosowny odcinek dostaniemy trójkąt równoramienny o obwodzie 1, a czynniki r i S we wzorze (*) zwiększą się przy tej operacji.



Zatem w rozwiązaniu zadania wystarczy ograniczyć uwagę do sytuacji, gdy obracany trójkąt jest równoramienny, a jego oś symetrii jest prostopadła do osi obrotu. Oznaczmy przez x połowę długości podstawy, a przez h — wysokość. Obwód ma być równy 1, więc $2x+2\sqrt{x^2+h^2} = 1$, skąd $h = \sqrt{1-4x}/2$. Czynniki we wzorze (*) równe są odpowiednio $r = 2h/3$, $S = xh$, co po krótkich rachunkach daje $V = \pi x(1-4x)/3$. Otrzymana funkcja kwadratowa przyjmuje maksimum $V_{max} = \pi/48$ dla $x = 1/8$, czyli wtedy, gdy obracany trójkąt ma boki długości 2/8, 3/8, 3/8.