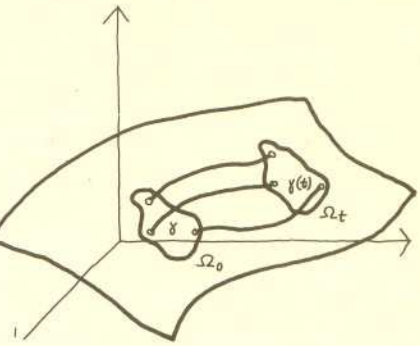
Twierdzenie o powrocie

Jednym z bardziej zaskakujących rezultatów w mechanice klasycznej jest twierdzenie o powrocie sformułowane w XIX w. przez wybitnego matematyka, fizyka i filozofa francuskiego Henri Poincarégo.
Dla przejrzystego sformułowania tego twierdzenia, jak też i dla jego dowodu, konieczne jest przypomnienie kilku własności ruchu w przestrzeni fazowej (Delta 1/1981).
Rozważmy układ cząstek działających na siebie całkowicie dowolnymi siłami. Jeśli układ ten ma f stopni swobody, to podanie f wartości współrzędnych $x_1, \ldots, x_f$ i f odpowiadających im pędów $p_1, \ldots, p_f$ daje kompletną informację o jego stanie. Nasuwa to myśl, żeby zmiany stanu układu w czasie rozważać w $2f$ wymiarowej przestrzeni euklidesowej.
Przestrzeń będąca zbiorem punktów $\gamma = (x_1, \ldots, x_f, p_1, \ldots, p_f)$, nazywana jest przez fizyków *przestrzenią fazową*. Każdemu możliwemu stanowi układu odpowiada dokładnie jeden punkt przestrzeni fazowej, a zmianom tego stanu w czasie przesuwanie się po krzywej $\gamma(t)$ wyznaczonej przez $2f$ równań ruchu. Krzywa ta zwana trajektorią układu leży na hiperpowierzchni wyznaczonej przez rozdzielające stałe ruchu, takie jak całkowita energia układu, całkowity pęd (tylko dla układów izolowanych) lub całkowity moment pędu (dla układów o symetrii obrotowej). Kształt trajektorii zależy oczywiście od punktu startu (stanu początkowego) na hiperpowierzchni, jednak żadne dwie trajektorie (różne stany początkowe) nie mogą się przecinać, ponieważ przy zadanych warunkach początkowych równania ruchu mają tylko jedno rozwiązanie.
Możemy więc wyobrażać sobie każdą trajektorię jako linię prądu fikcyjnej cieczy wypełniającej przestrzeń fazową. Przepływ cieczy odpowiada ruchowi układu, a jej podstawowa cecha to nieściśliwość. Fakt ten stanowi treść twierdzenia Liouville'a — *w przestrzeni fazowej objętość zachowuje się w czasie ruchu układu.* Twierdzenie to, równoważne równaniom ruchu, jest chyba najprostszym sposobem opisu ruchu układu wielu cząstek.
Niech Ω oznacza dostępną przestrzeń fazową, tj. hiperpowierzchnię stałych ruchu odpowiadającą zespołowi tych stałych wyznaczonych przez dane początkowe. Rozważmy pewien zbiór $\Omega_0 \subset \Omega$ o objętości $\vartheta(\Omega_0)$. Każdy punkt γ zbioru Ω_0 można przyjąć za stan początkowy układu. Wtedy Ω_t będzie obszarem złożonym ze wszystkich punktów $\gamma(t)$. Twierdzenie Liouville'a orzeka, że

$$\vartheta(\Omega_0) = \vartheta(\Omega_t).$$

Możemy teraz przystąpić do sformułowania *twierdzenia o powrocie*. Jedynym istotnym założeniem tego twierdzenia jest żądanie, by dostępna przestrzeń fazowa układu miała skończoną objętość. Do spełnienia tego założenia wystarczy na przykład ograniczenie się do hiperpowierzchni stałej energii (układ izolowany).

Niech teraz γ_0 będzie punktem początkowym trajektorii $\gamma(t)$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje czas T_ε, po którym punkt $\gamma(t)$ znajdzie się powtórnie w pobliżu γ_0 w odległości mniejszej niż ε. Twierdzenie to jest spełnione dla wszystkich punktów początkowych poza zbiorem o zerowej objętości.



Mówiąc mniej precyzyjnie, o ile nie mamy pecha i nie wybierzemy źle punktu startowego, to trajektoria po pewnym skończonym czasie powróci dowolnie blisko punktu startowego.
Dla dowodu rozważmy podzbiór A dostępnej przestrzeni fazowej. Niech objętość tego podzbioru będzie większa od zera a jego średnica mniejsza od ε. Pokażemy, że objętość zbioru B tych punktów A, które nigdy nie powracają do A, jest równa zeru. Z definicji zbioru B wynika, że musi istnieć czas τ, po którym zbiór B całkowicie „oderwie się" od zbioru A, tj. $B_\tau \cap A = \emptyset$. Przyjrzyjmy się teraz historii zbioru B w chwilach $0, \tau, 2\tau, \ldots N\tau$. Wszystkie zbiory $B_{n\tau}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ są rozłączne.
Załóżmy, że tak nie jest i

$$\tilde{\gamma} \in B_{n\tau} \cap B_{m\tau}, \quad \text{gdzie } n > m.$$

Jeśli teraz cofniemy się wzdłuż trajektorii, do której należy punkt $\tilde{\gamma}$ o m kroków wstecz w czasie, to z jednej strony powrócimy do zbioru $B \subset A$ a z drugiej do zbioru $B_{(n-m)\tau}$. Ponieważ jednak trajektorie nie mogą się przecinać, punkt, do którego w ten sposób dojdziemy będzie punktem wspólnym zbiorów A i $B_{(n-m)\tau}$, co przeczy definicji zbioru B.
Mamy więc N rozłącznych zbiorów $B_{n\tau}$ o tej samej objętości. Gdyby objętość ta była większa od zera, to ich całkowita objętość przekroczyłaby dla pewnego N objętość dostępnej przestrzeni fazowej. Objętość zbioru B musi więc być równa zeru.
Twierdzenie Poincarégo jest źródłem jednego z najistotniejszych paradoksów fizyki — paradoksu Zermelo. Termodynamika traktuje wszystkie rzeczywiste procesy jako procesy nieodwracalne, czego wyrazem jest zasada wzrostu entropii. Tymczasem zgodnie z twierdzeniem Poincarégo może się zdarzyć, że gaz początkowo wypełniający połowę naczynia, po rozprężeniu, z powrotem skupił się w tej samej połowie.
Paradoks ten rozwiązano w fizyce statystycznej przez dopuszczenie możliwości samorzutnego przejścia układu ze stanu równowagi do stanu nierównowagi z jednoczesnym zmniejszeniem się entropii układu. Im większa jest jednak taka fluktuacja, tym mniejsze jest prawdopodobieństwo jej wystąpienia. Jeżeli średni czas, jaki upływa między kolejnymi identycznymi fluktuacjami (czas powrotu), jest dużo większy od czasu obserwacji układu, to (na ogół) nie zdąży on powrócić do początkowego stanu nierównowagi i proces będzie miał (na ogół) charakter nieodwracalny.
Okazuje się, że czas powrotu dla układu N cząstek jest równy w przybliżeniu iloczynowi e^N i czasu charakterystycznego układu, co w przypadku jednego mola gazu daje niewyobrażalnie długi czas $e^{10^{23}} \cdot 10^{-23}$s — dużo, dużo dłuższy od czasu życia Wszechświata.