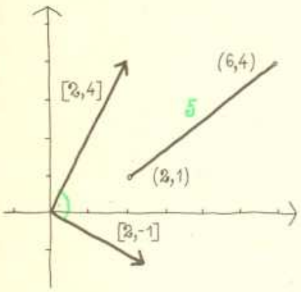
Najregularniejsze i najpopularniejsze geometrie

(w takiej kolejności, w jakiej zaczęto je uprawiać).

Geometria euklidesowa

Została zapoczątkowana przez Dorów (= Starożytni Grecy). I, ponieważ jesteśmy ich kulturowymi i cywilizacyjnymi potomkami, uważana jest powszechnie za tę ,,zwykłą" i ,,naturalną". Znamy ją, zanim zaczniemy się czegokolwiek uczyć — już w pierwszej klasie dzieci starannie piszą w zeszytach ,,takie same" litery jak pani na tablicy, choć przecież smarują obrazek 20 razy mniejszy. A możliwość *rysowania w skali* jest charakterystyczna dla geometrii euklidesowej i oddała Europejczykom wielkie usługi w technice i podbojach choćby. Powszechnie posługujemy się *prostokątem* i wiemy, że *nie ma prostych prostopadłych do nich samych.*



Wymienione trzy własności całkowicie odróżniają geometrię euklidesową od innych (uprawianych). Nie będziemy się nad tą geometrią rozwodzić, bo sądzimy, że Czytelnicy ją znają. Podobnie, jak wiedzą, co to są liczby rzeczywiste i że w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie odległość punktów (x_1, x_2) i (y_1, y_2) wynosi

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

zaś prostopadłość wektorów $[x_1, x_2]$ i $[y_1, y_2]$ to zależność ta sama, co

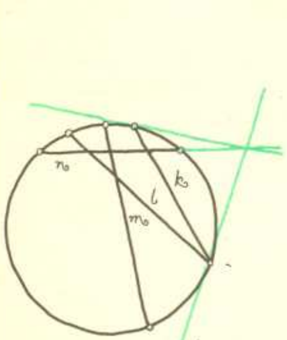
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Geometria Bolyai — Łobaczewskiego

Pisaliśmy o niej w Delcie 10/1975. Warto zajrzeć też do książki Stefana Kulczyckiego ,,*Geometria nieeuklidesowa*".

ma datę powstania (ok. 1830) i odkrywców (Janos Bolyai — 1832, Mikołaj Łobaczewski — 1829), choć była uprawiana już stulecie wcześniej. Wzięła się z rozważania konieczności umieszczenia w aksjomatyce geometrii euklidesowej tzw. V postulatu — była więc początkowo tworem czysto intelektualnym. Obecnie traktowana jest równorzędnie z euklidesową jako jeden z możliwych (i używanych przez fizyków i astronomów) sposobów opisu realnej przestrzeni.

Nie dopuszcza istnienia prostokątów, istnieją w niej trójkąty, na których nie da się opisać okręgu, trójkąty o odpowiednio równych katach okazują się przystające, z sumy tych kątów można obliczyć pole, proste równoległe zbliżają się asymptotycznie do siebie itd. itp.



Inne modele są opisane w artykule ,,Jak wygląda świat geometrii Bolyai-Łobaczewskiego".

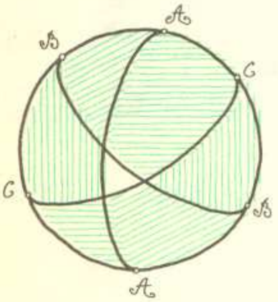
Gdyby ktoś chciał samodzielnie się z nią zapoznać np. w przypadku dwuwymiarowym, polecamy eksperymenty z *modelem Kleina*. Jest to obiekt zbudowany na płaszczyźnie euklidesowej i mający te same własności, co płaszczyzna Bolyai — Łobaczewskiego. Punkty modelu Kleina, to punkty wnętrza euklidesowego koła jednostkowego, proste — to cięciwy tego koła. Kilka innych pojęć określimy za pomocą rysunku: proste leżące tak jak k i l — to równoległe, tak jak k i m — nadrównoległe, tak jak k i n (uwaga na zielone linie) — prostopadłe. Dla stwierdzenia, czy wszystko jest jasne, proszę sprawdzić, że dwie różne proste mają wspólną prostopadłą wtedy i tylko wtedy, gdy są nadrównoległe. A także: dowolny kąt ma prostą zagradzającą tj. prostą równoległą do obu jego ramion. Gdyby ktoś chciał mieć jeszcze odległość, niech poszuka w artykule ,,Geometria na płaszczyźnie afinicznej".
Tu podamy tylko jeszcze warunek na to, by wektory $[x_1, x_2]$ i $[y_1, y_2]$ w zwykłym kartezjańskim układzie współrzędnych (początek układu w środku koła) były prostopadłe:

$$1 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

Geometria eliptyczna

Pisaliśmy o niej w Delcie 1/1977 i 2/1977 (autorem tego ostatniego artykułu był Albert Einstein). Warto też zajrzeć do książki H.S.M. Coxetera „*Wstęp do geometrii dawnej i nowej*".

też ma datę narodzin (ok. 1860) i ojca (Bernhard Riemann) — tym razem bez żadnych zastrzeżeń. W tej geometrii każde dwie różne proste przecinają się w jednym punkcie. Nie ma więc ani równoległych, ani nadrównoległych. Są w niej prawdziwe wymienione wyżej własności geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, w których nie było mowy o równoległych i nadrównoległych z jednym wyjątkiem — analogicznie jak w euklidesowej na trójkącie można opisać okrąg.



Ponadto np. prosta nie rozcina płaszczyzny eliptycznej, a trzy dzielą płaszczyznę nie na 7 (jak w obu wymienionych wyżej) lecz na 4 części.

Można sobie płaszczyznę eliptyczną wyobrazić, choć nie ma ona naturalnego modelu ani na płaszczyźnie, ani nawet w przestrzeni euklidesowej. Weźmy mianowicie półsferę w przestrzeni euklidesowej (mniej więcej to co widać patrząc na sferę) i niech prostymi będą na niej półokręgi wielkie. Żeby nasza płaszczyzna eliptyczna nie miała brzegu, „sklejmy" (utożsammy) końce tych półokręgów (nie da się tego fizycznie zrobić nie zlepiając ich w jedno, ale w wyobraźni można).

Inny (choć nie bardzo) model jest opisany w artykule ‚Geometria na sferze".

Odległość mierzmy wzdłuż „prostych" (oczywiście mniejszy z dwóch odcinków, nawet jeśli ten mniejszy zawiera sklejenie) zwyczajnie, np. nitką. Kąty też będziemy mierzyć zwyczajnie. I model gotowy.

Jeżeli nasza płaszczyzna eliptyczna powstała ze sfery jednostkowej (mającej środek w początku zwykłego przestrzennego kartezjańskiego układu współrzędnych), to prostopadłość wektorów $[x_1, x_2, x_3]$ i $[y_1, y_2, y_3]$ będzie się wyrażała wzorem

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Geometria Minkowskiego

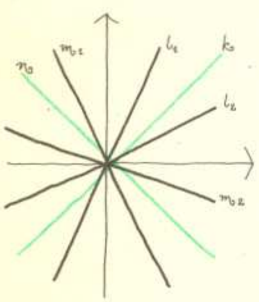
Pisaliśmy o niej w Delcie 12/1979 właśnie z okazji szczególnej teorii względności.

czyli czasoprzestrzeń. Tym samym podaliśmy i datę i autora — Hermann Minkowski opracował w 1908 r. tę teorię dla ścisłego matematycznego ujęcia szczególnej teorii względności Alberta Einsteina. Własności linii prostych w tej geometrii nie różnią się od euklidesowych. Natomiast we wszystkich wzorach dotyczących prostopadłości, czy odległości należy przed współrzędną „czasową" dodać „jednostkę urojoną" czyli $\sqrt{-1}$. Dla przykładu więc na płaszczyźnie Minkowskiego (jeden wymiar geometryczny, jeden „czasowy") odległość punktów (x_1, x_2) i (y_1, y_2) wyrazi się wzorem

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}$$

a prostopadłość wektorów $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$



Natychmiast stwierdzamy stąd, że wektor [1, 1] jest sam do siebie prostopadły (fachowo: *izotropowy*)! Prosta o kierunku izotropowym też jest tak nazywana. Na rysunku izotropowe są więc proste k i n. Proste l_1 i l_2 są prostopadłe, jak też proste m_1 i m_2. Ogólnie każde proste położone (euklidesowo) symetrycznie względem prostych izotropowych są prostopadłe (i na odwrót: każde prostopadłe tak leżą). Mimo to na płaszczyźnie Minkowskiego istnieją prostokąty.

CO ONE MAJĄ WSPÓLNEGO

Przede wszystkim tytułową własność — jednorodność. Otóż otoczenia dowolnych punktów (w każdej z rozpatrywanych płaszczyzn) niczym się nie różnią. Po drugie — prostopadłość w każdej z nich wyraża się przez pierwiastki wielomianu stopnia 2. „Po trzecie" raczej nie ma — ich (znów tytułowa) popularność wynika z wyżej podanych własności. Fizycy, czy astronomowie lubią po prostu wyobrażać sobie otaczający świat jednorodnie tak długo jak to się tylko da zrobić.

Rozwiązanie zadania F 104. Skoro wewnętrzna powierzchnia z założenia nie absorbuje światła, to musi się ustalić stan stacjonarny, w którym strumienie świetlne: wnikający do sfery i wybiegający z niej są równe. Oznacza to równość oświetleń otworu od wewnątrz i z zewnątrz. Na punkt położony naprzeciwko otworu pada światło ze źródła oraz światło rozproszone przez wewnętrzną powierzchnię sfery. Jeśli średnica otworu jest mała w porównaniu z promieniem sfery, to oświetlenie światłem rozproszonym każdego punktu wewnętrznego jest takie samo jak oświetlenie otworu od wewnątrz. Wynika stąd, że punkt naprzeciwko otworu jest dwa razy mocniej oświetlony niż pozostałe.

CO MOGĄ MIEĆ WSPÓLNEGO

Jest powszechnie wiadomo, że pierwsze dwie spośród wymienionych geometrii mają wspólną bardzo obfitą w twierdzenia część zwaną geometrią absolutną (z dobrą dokładnością to, co wynika z pierwszych czterech postulatów Euklidesa). Trzy pierwsze są zebrane razem w artykule „Geometrie na rozmaitości". A cztery? Jeśli je nieco rozszerzymy i tu znajdzie się pokaźna część wspólna.

Geometrie rzutowo-metryczne

Jest to pierwsza publikacja na ten temat. Szkoda, że tak pobieżna.

Wypada tu najpierw przypomnieć (zasugerować), co to jest przestrzeń (w szczególności płaszczyzna) rzutowa. Powstaje ona przez dołączenie do każdej prostej euklidesowej nowego punktu zamykającego nasze proste w „okręgi", przy czym do prostych równoległych dołączamy ten sam punkt. W przypadku płaszczyzny umawiamy się jeszcze dodatkowo, że te nowe punkty tworzą (jedną) nową prostą.

Ktoś może zauważyć, że to właściwie tak samo, jak w geometrii eliptycznej, i że ta półsfera, to model geometrii rzutowej. Słusznie! Tyle, że geometria eliptyczna jest bogatsza od rzutowej, gdyż jest w niej mowa nie tylko o prostych, lecz także o prostopadłości, o odległości.

Pytanie, czy nie można by było w geometrii rzutowej tak określić prostopadłości, by na jej „starych" punktach była to prostopadłość euklidesowa? Albo Minkowskiego? Można. Wystarczy zachować stary wzór na prostopadłość. Wówczas nowa prosta będzie prostopadła do wszystkich innych (do siebie zresztą też) — będzie *osobliwa*.

A w przypadku Bolyai-Łobaczewskiego? Model Kleina leży na płaszczyźnie euklidesowej, ta z kolei... No dobrze, a co z prostopadłością? Jeśli bez uprzedzeń przyjrzeć się rysunkowemu przepisowi, to będzie on działał na całej płaszczyźnie rzutowej. A co ze wzorem?

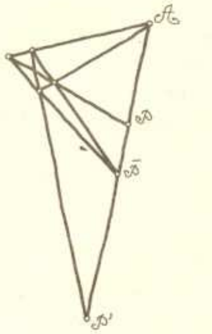
Tu zdecydowanie należy gdzieś zajrzeć. Np. do Delty 12/1980.

Tu znów uwaga na boku — w geometrii rzutowej do współrzędnych starych punktów dopisuje się jeszcze jedną, równą 1 i za współrzędne punktu uważa się całą klasę trójek proporcjonalnych do otrzymanej, zaś nowe punkty mają tę dodatkową współrzędną równą zero. Wzór na prostopadłość w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego przyjmuje wtedy postać

$$x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

I tak możemy uprawiać cztery wymienione geometrie łącznie, jako te, które mają prostopadłość wyrażającą się przez pierwiastki wielomianu jednorodnego (względem obu wektorów) stopnia 2, nie redukowalnego do jednomianu. Bo algebra poucza, że każdy inny sprowadzimy przez zmianę układu współrzędnych do jednej z podanych wyżej postaci.

CZY TO NIE SZTUCZNE



Okazuje się, że nie. Oto przykład czegoś wspólnego dla tak rozszerzonych geometrii. Weźmy pod uwagę punkt A i nie przechodzącą przez niego prostą a. Dla dowolnego punktu P (różnego od A i nie na a) oznaczmy przez $\bar{P}$ punkt przecięcia prostej AP z a, oraz przez P' czwarty harmoniczny do $A\bar{P}P$ — czyli taki, dla którego da się narysować taką figurę jak na rysunku (odległości nie odgrywają roli — ważne jest tylko przecinanie się prostych). Ciekawe, że taki punkt P' jest dokładnie jeden. Homologią harmoniczną o środku A i osi a nazywamy następujące przekształcenie φ:

$$\varphi(P) = \begin{cases} P & \text{gdy } P = A \vee P \in a \\ P' & \text{gdy } P \neq A \wedge P \notin a. \end{cases}$$

Symetrią nazwiemy homologię harmoniczną o środku A i osi a spełniających warunek

$$\bigwedge_b A \in b \rightarrow a \perp b.$$

I wówczas każda izometria (w każdej z czterech, ale rozszerzonych geometrii) jest złożeniem dwóch symetrii.

CIĘŻKO BYŁO, ALE

warto sprawdzić, czy się wie, o co chodzi. W tym celu proponujemy zastanowienie się nad dwoma zadaniami:

1. Wykazać, że takie symetrie w rozszerzonej płaszczyźnie euklidesowej to zwykłe symetrie osiowe, bądź środkowe.

2. Skoro tak, to dlaczego nie umiemy rysować obrazów symetrycznych samą linijką? A czy umiemy samą ekierką?