Kondensatory

Każdemu punktowi (x, y) płaszczyzny odpowiada liczba zespolona

$$z = x+iy.$$

We współrzędnych biegunowych $z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; r nazywamy modułem liczby z, zaś φ jej argumentem.
Możemy z traktować jak pojedynczą zmienną i przy jej pomocy określać różne funkcje przyjmujące wartości zespolone. Każdą taką funkcję można przedstawić w postaci sumy jej części rzeczywistej i urojonej:

$$f(z) = u(x, y)+iv(x, y),$$

gdzie funkcje u i v są rzeczywiste.
Okazuje się (jest to treścią podstawowego w analizie zespolonej twierdzenia), że dla każdej „zwyczajnej" funkcji zmiennej zespolonej $\left(\text{np. } z^2, \ln z, \frac{1}{z}, \sin z \ldots\right)$ spełnione są warunki

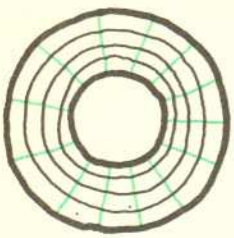
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wynika z nich natychmiast, że zarówno funkcja u, jak i v spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a, czyli przedstawia pewien potencjał elektrostatyczny. Dla przykładu rozważmy funkcję

$$f(z) = \ln z = \ln r+i\varphi.$$

Mamy dla niej

$$u(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

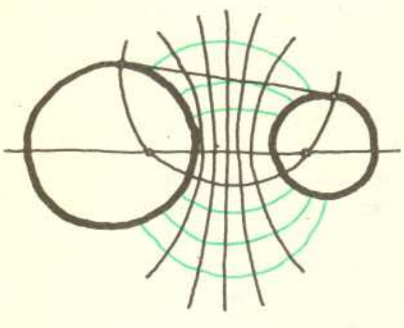


Aby określić sens fizyczny otrzymanego w ten sposób potencjału, musimy wyznaczyć linie ekwipotencjalne. Są to okręgi. Taki układ linii ekwipotencjalnych przedstawia np. rozkład pola w otoczeniu naładowanego przewodnika prostoliniowego.
Nietrudno teraz odgadnąć, jaka funkcja zespolona daje potencjał wewnątrz nieskończenie długiego kondensatora cylindrycznego o promieniach r i 1, którego zewnętrzna okładka jest uziemiona, a potencjał wewnętrznej wynosi V. Jest to mianowicie funkcja

$$f(z) = V\ln z/\ln r.$$

A jak znaleźć potencjał pola, gdy rozsuniemy okładki kondensatora? Tym razem z pomocą przychodzi funkcja zespolona zwana homografią

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$



gdzie a, b, c i d to stałe zespolone, przy czym $ad-bc \neq 0$. Dwie własności tej funkcji pozwolą na rozwiązanie postawionego wyżej problemu. Homografia przekształca dowolny okrąg na płaszczyźnie xy w okrąg na płaszczyźnie uv, a dowolną parę punktów symetrycznych względem okręgu w parę punktów symetrycznych względem obrazu tego okręgu.
Możemy teraz w prosty sposób przekształcić układ przewodników z rysunku na kondensator cylindryczny.
Wystarczy tylko wybrać odpowiednią homografię. W tym celu konstruujemy wspólną styczną do obu okręgów i wykreślamy na niej półokrąg. Punkty przecięcia półokręgu z linią łączącą środki okręgów (a i b) są wtedy symetryczne jednocześnie względem obu okręgów (dowód pozostawiamy Czytelnikowi). Dla okręgów koncentrycznych punktami symetrycznymi jednocześnie względem obu okręgów są 0 i ∞. Homografię należy więc dobrać tak, aby przekształcała punkt a w 0, a punkt b w ∞. Jedyną taką homografią jest

$$F(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

Możemy teraz odgadnąć potencjał pola wokół przewodników. Część rzeczywista funkcji

$$f[F(z)] = V\ln\frac{z-a}{z-b}\Big/\ln r$$

spełnia, jak łatwo sprawdzić, wszystkie warunki brzegowe.
Funkcja

$$F(z) = z+e^z$$

przekształca pasek $-\pi < y < \pi$ na całą płaszczyznę z wyjętymi półprostymi $-\infty < u < -1, v = \pm\pi$. Czytelnikowi pozostawimy znalezienie na podstawie znanego rozkładu pola w nieskończonym kondensatorze płaskim pola wokół kondensatora, którego okładki są półpłaszczyznami.

Rozwiązanie zadania **F 105**. Odczytywanie tekstu polega na rozróżnianiu jaskrawości elementów powierzchni, na którą został naniesiony. Gdy cienki papier (np. bibułka papierosowa) znajduje się w sporej odległości od tekstu, wtedy promienie światła odbitego w różnych kierunkach od białych elementów stronicy dają w przybliżeniu równomierne oświetlenie jej powierzchni. Przeczytanie tekstu jest niemożliwe, tym bardziej, że sama bibułka dodatkowo rozprasza padające na nią promienie. W przypadku przylegania do tekstu, odbite promienie nie pokrywają się. Decydującą rolę odgrywa wtedy rozpraszanie na przylegającym papierze. Gdy jest on dostatecznie cienki, rozpraszanie jest tak małe, że kontrast między literami i bielą kartki nie ulega istotnej zmianie.