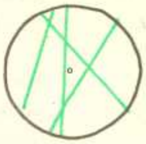
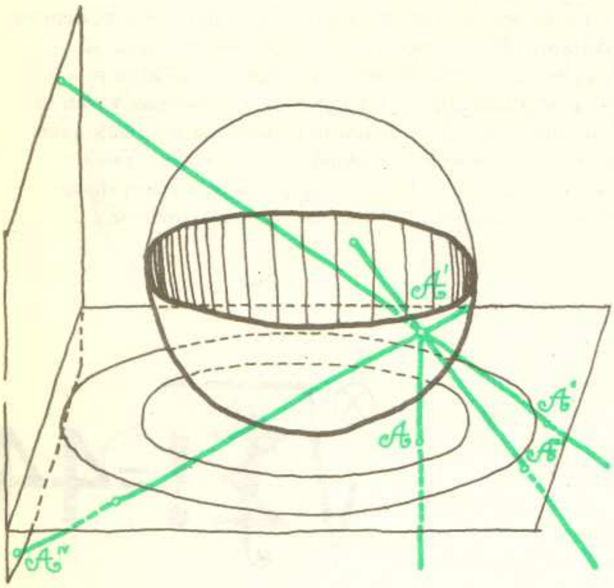
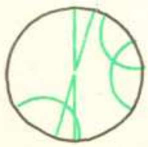
Jak wygląda świat geometrii Bolyai-Łobaczewskiego

Właściwie dziwne pytanie — wystarczy zajrzeć do artykułu „Najregularniejsze i ...” i zobaczyć — geometria Bolyai-Łobaczewskiego to geometria modelu Kleina. Proste to kawałki euklidesowych prostych — cięciwy koła czyli odcinki otwarte. Ale z odległością już trudniej i wzór (por. artykuł „Geometria na płaszczyźnie afinicznej”) wcale nie jest ładny. A gdyby ktoś chciał jeszcze mierzyć kąty!

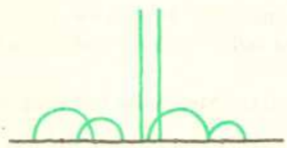




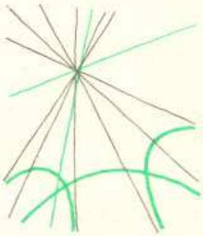
Zróbmy więc tak: weźmy w trójwymiarowej przestrzeni płaszczyznę H o równaniu $z = 0$ i w niej koło K: $x^2+y^2 < 1$ — *model Kleina* geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Następnie weźmy sferę S: $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$. S jest styczna do H w punkcie $\langle 0, 0, 0\rangle$. Niech S^+ oznacza dolną półsferę, czyli zbiór punktów z S spełniających zależność $z < 1$. Zrzutujmy prostokątnie K na S^+ — każdy uwierzy, że obraz będzie też modelem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego — punkty to punkty S^+, a proste to półokręgi prostopadłe do brzegu S^+ (czyli do *absolutu*). Proste trochę się pogięły, ale za to model jest wiernokątny: kąty mierzone między tymi półokręgami są takie, jak między prostymi w geometrii hiperbolicznej. A może chcielibyście zobaczyć tu model na płaszczyźnie? Proszę bardzo — zrzutujemy S^+ stereograficznie na H z punktu $\langle 0, 0, 2\rangle$ (bieguna antypodycznego do punktu styczności S i H). Obrazem na H będzie koło K' o równaniu $x^2+y^2 < 4$, $z = 0$; proste to półokręgi w K' prostopadłe do brzegu K' oraz średnice K'. To też model wiernokątny — bo rzut stereograficzny jest przekształceniem wiernokątnym. Ten model nazywa się *modelem Poincarégo w kole.*



A żeby model był (euklidesowo) nieograniczony? Do tego celu ustawmy płaszczyznę H' o równaniu $y = -1$ i zrzutujmy S^+ na H' z punktu $\langle 0, 1, 1\rangle$ — antypodycznego do punktu styczności S z H'. Obrazem na H' będzie półpłaszczyzna $z < 1, y = -1$. Proste — to półproste prostopadłe do jej brzegu i półokręgi prostopadłe do tego brzegu (czyli o środkach leżących na nim). I ten model — *model Poincarégo na półpłaszczyźnie* — jest wiernokątny.



Wszystkie dotychczas pokazywane modele były budowane na pewnych kawałkach płaszczyzny euklidesowej. Czy nie można zobaczyć geometrii Bolyai-Łobaczewskiego na całej płaszczyźnie? Weźmy jeszcze raz model na półsferze S^+ i zrzutujmy go na H — tym razem ze środka sfery czyli punktu $\langle 0, 0, 1\rangle$. Obrazami półokręgów przechodzących przez $\langle 0, 0, 0\rangle$ będą na H proste przechodzące przez $\langle 0, 0, 0\rangle$. Obrazami innych półokręgów prostopadłych do brzegu będą gałęzie hiperbol o środku w $\langle 0, 0, 0\rangle$. I tak oto dostaliśmy następny model geometrii Bolyai-Łobaczewskiego — *model Ornocha.* Proste nie są wprawdzie zbyt proste a i model nie jest wiernokątny, ale za to jest na całej płaszczyźnie. I do tego jest wiernoodległościowy — odległości mierzone po prostych tego modelu są takie, jak w geometrii hiperbolicznej.



Model Ornocha można też wprost uzyskać z modelu Kleina — por. hiperboliczną metryzację całej płaszczyzny euklidesowej podaną w artykule „Geometria rozmaitości”.

W każdym z tych modeli można zobaczyć geometrię Bolyai-Łobaczewskiego i w każdym z nich można ją uprawiać. Równoważnie — skoro są izomorficzne, a wszak konstruowane rzuty to były izomorfizmy budowanych modeli. Tyle, że wspomagać się przy tym możemy różnymi innymi geometriami: w modelu Kleina rzutową, w modelach Poincarégo — Möbiusa lub euklidesową. Tak więc w modelu Kleina symetrie to pewne homologie, w modelu Poincarégo w kole symetrie to inwersje (i zwykłe osiowe), a na sferze to symetrie względem okręgów. Może ktoś ładnie opisze, czym są symetrie osiowe w modelu Ornocha.