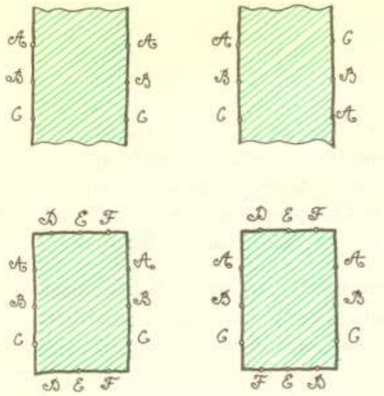


I tu warto zajrzeć do Delty 1/1981.

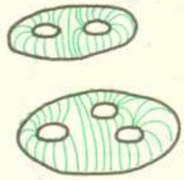
Pas (nieskończony) sklejamy w *walec*. Oczywiście po sklejeniu krzywizna jest taka jak przed, gdyż żadna odległość na powierzchni się nie zmieniła, a za pomocą odległości da się ustalić krzywiznę.

Albo taki sam pas sklejamy we *wstęgę Möbiusa*. Jeśli przyjmiemy umowę, co do odległości taką samą, jak przy przekształceniu modelu Kleina na całą płaszczyznę (patrz wyżej), to i tu uzyskamy krzywiznę zero, gdyż odległości nie będą zmienione.

Sklejając z kolei prostokąt w *torus* lub w *butelkę Kleina*, z analogiczną umową jak przy wstędze Möbiusa uzyskamy ostatnie dwie rozmaitości o krzywiźnie zerowej.

Krzywizna ujemna. Tu mamy **nieskończenie wiele** możliwości. Jest wśród nich płaszczyzna z metryką uzyskaną wyżej z modelu Kleina. Pozostałe możliwości to między innymi wszystkie n torusy (dla $n > 1$) i n walce (dla $n > 2$).

3 — walec i 4 — walec.



2 — torus i 3 — torus.

Geometrie eliptyczna, paraboliczna i hiperboliczna

Jeżeli zażądamy od rozmaitości, aby nie tylko miała stałą krzywiznę, lecz także by przez jej dowolne dwa różne punkty przechodziła dokładnie jedna prosta (= geodezyjna), wówczas w każdej z trzech rozpatrzonych wyżej grup pozostanie po jednej rozmaitości. Odpowiednie geometrie noszą właśnie nazwy stanowiące tytuł tego fragmentu. Jak widać geometria paraboliczna miała już przed Riemannem nazwę — to geometria euklidesowa. Podobnie hiperboliczna — to geometria Bolyai-Łobaczewskiego.

Inaczej o tym samym — Delta 7/1975.

Jeśli przez defekt trójkąta $-\Delta(ABC)$ — będziemy rozumieli różnicę π i sumy rozwartości jego kątów, to w każdej z wymienionych płaszczyzn mamy $\Delta(ABC) = K \cdot S_{ABC}$, gdzie K jest krzywizną Gaussa tej płaszczyzny.

A oto np. wzór sinusów w każdej z tych geometrii:

eliptyczna: $$\frac{\sin BC}{\sin\alpha} = \frac{\sin CA}{\sin\beta} = \frac{\sin AB}{\sin\gamma},$$

paraboliczna: $$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

hiperboliczna: $$\frac{\sinh BC}{\sin\alpha} = \frac{\sinh CA}{\sin\beta} = \frac{\sinh AB}{\sin\gamma}.$$

Geometrodynamika

Wyobraźmy sobie świat dwuwymiarowy. Wszystko, o czym powiemy, będzie można łatwo uogólnić na przypadek rzeczywistego świata trójwymiarowego. Niech więc światem będzie na przykład powierzchnia nieskończenie rozległego płaskiego oceanu. Na oceanie mogą jednak rozchodzić się fale. Każdemu rodzajowi fali odpowiada nieeuklidesowa geometria świata powierzchniowego. Co więcej, kształt powierzchni falującego oceanu, a więc i wartość jej krzywizny będzie w każdym punkcie zmieniać się wraz z upływem czasu. Geometria świata powierzchniowego będzie wtedy ewoluować, podobnie jak to czyni geometria świata rzeczywistego.

Szczególnym rodzajem ruchu falowego jest rozchodzenie się fali płaskiej o określonej częstości. Słowo rozchodzenie się jest jednak w tym przypadku nie bardzo właściwe. Każdy punkt oceanu drga bowiem zupełnie tak samo i mówienie o tym, co jest wcześniej a co później, nie ma większego sensu. Trudno na takim nieskończenie i wszędzie jednakowo falującym oceanie mówić o jakimkolwiek upływie czasu. Tym bardziej, że prócz tej powierzchni nasz świat nie zawiera niczego więcej.

Nieskończone fale płaskie o określonej częstości grają w fizyce rolę szczególną. Przez złożenie odpowiedniej ich ilości (zsumowanie bądź scałkowanie) możemy w wyniku interferencji fal o różnych częstościach uzyskać zupełnie dowolny kształt powierzchni oceanu wraz z dowolnymi jego zmianami. W taki też sposób przez interferencję fal świetlnych dostajemy promienie światła — podstawę optyki geometrycznej. Podobnie, odpowiednia interferencja fal materii prowadzi do pojawienia się torów cząstek elementarnych i przeprowadza nas od świata mechaniki kwantowej do mechaniki klasycznej. W obu tych przypadkach interferencja destruktywna (wygaszanie) wszędzie, z wyjątkiem bardzo wąskiego paska przestrzeni (toru promienia lub cząstki), prowadzi do pojawienia się nietrywialnego zjawiska rozchodzenia się, a w konsekwencji i czasu. Cząstka bowiem rozchodzi się z określoną prędkością (prędkością owej grupy interferujących fal) i gdzieś jest najpierw, a gdzie indziej potem. Zupełnie podobnie może być w przypadku geometrii świata.

Wyobraźmy sobie, że różne rodzaje fal płaskich o różnych częstościach to możliwe geometrycznie stany świata powierzchni oceanu. W każdym z nich pojęcie czasu nie ma sensu. Świat prawdziwy powstaje w wyniku interferencji wielu takich fal i ma pewną określoną strukturę geometryczną oraz określony jej rozwój w czasie. Szczęśliwy traf, który musiał kiedyś nastąpić, spowodował, że interferencja różnych form istnienia świata stała się prawie wszędzie destrukcyjna i od tego momentu liczymy upływ czasu i możemy mówić o czterowymiarowej czasoprzestrzeni. „Przedtem" czasu nie było, a właściwie lepiej powiedzieć, że wszędzie były wszystkie możliwe czasy — od początkowego, aż do ostatecznego.

Wydaje się, że taki obraz świata miał na myśli John Archibald Wheeler proponując swą geometrodynamikę. Niestety idea ta nie doczekała się żadnej poważniejszej realizacji.