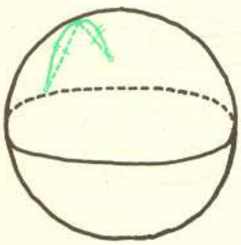
Geometrie na sferze

Sfera

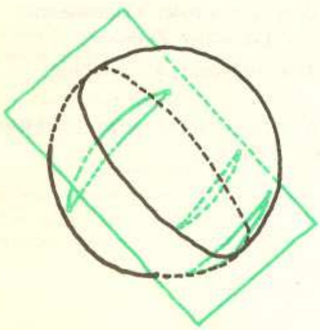
W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej sfera to zbiór punktów równooddalonych od ustalonego punktu przestrzeni. Jest to zatem zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2 = r^2$, gdzie $r \neq 0$. Dowolne dwie sfery są podobne, możemy więc dalej przyjąć, że $r = 1$ i $\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle$ i tę sferę uznać za ,,wzorcową".

Odległości punktów na sferze możemy mierzyć dwoma (co najmniej) sposobami: za ich odległość przyjąć długość odcinka w przestrzeni łączącego te punkty albo długość łączącego je najkrótszego łuku na sferze (łuk taki, to fragment okręgu wielkiego, czyli przecięcia sfery z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Obie metryki są równoważne w takim sensie: odcinki przystające w jednej z nich przystają i w drugiej; bardziej naturalna wydaje się ta ,,wewnętrzna" — mierzenie po sferze, a łatwiejsza w posługiwaniu ,,zewnętrzna" definicja odległości. Mamy więc na sferze relację przystawania odcinków.



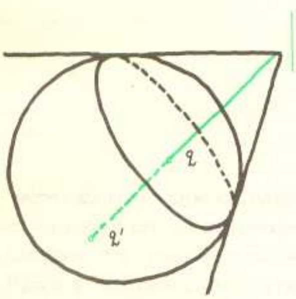
Żeby mówić o geometrii warto móc posługiwać się prostymi. Najprościej zdefiniować: prosta to symetralna odcinka. Jeśli tak, to prosta jest przecięciem płaszczyzny (w przestrzeni symetralne to płaszczyzny) ze sferą, a więc okręgiem wielkim (bo środek sfery leży na symetralnej dowolnej pary punktów ze sfery).

Geometria sferyczna



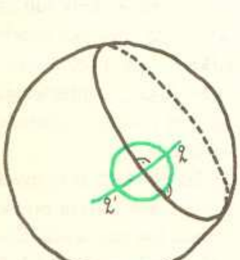
Uzyskaliśmy tak *geometrię sferyczną* — opisuje ona płaszczyznę sferyczną (czyli naszą sferę) przy użyciu pojęć ,,punkt", ,,prosta" (czyli okrąg wielki) i ,,kąt między prostymi" — bo kąty także umiemy mierzyć, skoro umiemy mierzyć odległości na płaszczyźnie sferycznej. Możemy też w niej mówić o symetriach osiowych — bo każda taka symetria to w istocie obcięcie trójwymiarowej symetrii płaszczyznowej do powierzchni sfery. Dowolną izometrię płaszczyzny sferycznej możemy rozszerzyć do izometrii całej przestrzeni — izometria taka musi mieć punkt stały (środek sfery nie może się poruszyć), a więc może być tylko obrotem lub symetrią obrotową.

Stąd uzyskujemy mocne i podobne do euklidesowego twierdzenie: *Każda izometria płaszczyzny sferycznej jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych.*



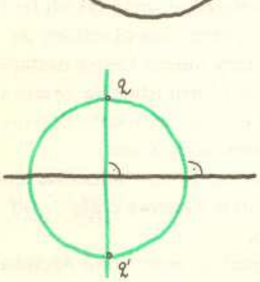
Skoro umiemy mierzyć kąty, warto może byłoby zainteresować się podobieństwami płaszczyzny sferycznej. To nic, że spotkać tu możemy trójkąty ,,dziwne" — o dwóch, albo i trzech kątach prostych, o dwóch kątach większych od prostego itp. Nie szkodzi — podobieństwo i tu ma sens — to przekształcenie zachowujące kąty. Dopóki mierzyć będziemy kąty między prostymi (okręgami wielkimi), a więc również wymagać, by przechodziły one na siebie, nie uzyskamy nic nowego — każde podobieństwo płaszczyzny sferycznej jest jej izometrią. Ale jeśli do konkurencji dopuścimy wszystkie okręgi... Zauważmy, że przy zwykłej definicji okręgu (zbiór punktów równooddalonych od danego) proste płaszczyzny sferycznej są też na niej okręgami.

Geometria Möbiusa



Rozważmy takie przekształcenie f. Wybierzmy punkt p leżący poza sferą. Dla każdego punktu q na sferze konstruujemy jego obraz $f(q)$ jak następuje: łączymy p i q prostą a drugi punkt jej przecięcia ze sferą (albo q, gdy jest ona do sfery styczna) oznaczamy $f(q)$. Zbiór punktów stałych f układa się na pewnym okręgu k, a samo f jest ,,wiernokątne" — przeprowadza okręgi na sferze na okręgi i zachowuje kąty między okręgami. A więc jest podobieństwem (i do tego inwolucyjnym, czyli odwrotnym do siebie). Można by je też nazwać *symetrią*, względem k — nawet obraz punktu konstruuje się jak przy ,,zwykłej" symetrii, a gdy p umieścimy ,,w nieskończoności", to f okaże się znaną już symetrią — okrąg k będzie okręgiem wielkim.

W ten sposób na sferze zbudowaliśmy drugą geometrię — *geometrię Möbiusa.* Posługuje się ona pojęciami ,,punkt" = punkt ze sfery, ,,prosta" = okrąg na sferze, ,,prostopadłość" [albo ,,kąt między prostymi"]. A poznane dopiero co symetrie tworzą w niej zbiór generujący wszystkie podobieństwa. Mamy bowiem twierdzenie:
Każde podobieństwo płaszczyzny Möbiusa jest złożeniem co najwyżej czterech symetrii osiowych.

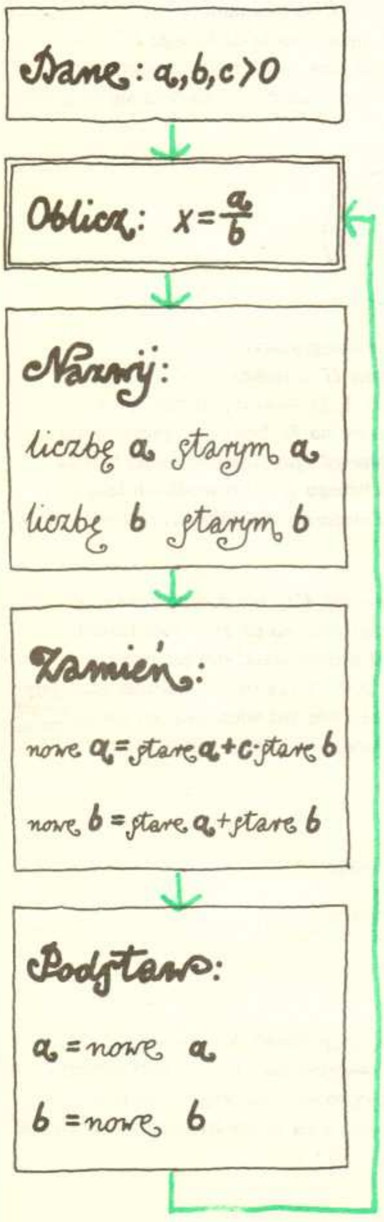


Płaszczyzna Möbiusa i wstęga Möbiusa nic mają nic wspólnego (poza tym, że obie są powierzchniami).

A dalej — dalej możemy już po prostu uprawiać te geometrie i dowodzić takie (dość już nieoczywiste) twierdzenia:
W geometrii sferycznej i w geometrii Möbiusa każde podobieństwo parzyste (tzn. zachowujące orientację) *rozkłada się na co najwyżej dwa inwolucyjne podobieństwa parzyste.* Z izometriami łatwiej — szukane inwolucje to symetrie osiowe sfery, ale na płaszczyźnie Möbiusa?
Albo: *dowolne dwa trójkąty na płaszczyźnie Möbiusa o sumie kątów* 0 *można przeprowadzić na siebie pewnym podobieństwem.*

Geometria eliptyczna

Obie te geometrie mają jednak jedną, dość nieprzyjemną własność: proste mogą się przecinać w dwu różnych punktach. W geometrii sferycznej nawet muszą — bo dowolne dwie płaszczyzny wycinające na sferze okręgi wielkie przecinają się wzdłuż prostej (przechodzącej przez środek sfery) — a ta przecina sferę w dwu punktach. Ale jeśli dwa punkty nie leżą antypodycznie (prosta łącząca je nie przechodzi przez środek sfery), to przez takie dwa punkty na płaszczyźnie sferycznej przechodzi już dokładnie jedna prosta. Możemy więc utożsamić punkty antypodyczne — posklejać je w pary. Przy sklejaniu odpowiadające sobie punkty leżą na tych samych prostych, a więc po utożsamieniu antypod dowolne dwie proste będą się przecinać i to w dokładnie jednym punkcie. Taka posklejana sfera nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej — nie szkodzi — można ją sobie wyobrazić, można także mówić o prostych na niej — to odpowiednio pozlepiane okręgi wielkie. I w ten sposób uzyskaliśmy płaszczyznę eliptyczną — wystarczy zauważyć, że sklejanie nie popsuło nam miary kątów, a jeśli chcemy mierzyć odległości punktów p — q musimy zmierzyć na sferze odległość p od q i odległość p od antypody q — mniejsza z nich to dobra miara odległości w płaszczyźnie eliptycznej. Tyle, że jest to płaszczyzna nieorientowalna — nie można rozróżnić izometrii parzystych od nieparzystych. Albo inaczej — ***każda symetria osiowa jest złożeniem dwu innych symetrii osiowych***, co łatwo zobaczyć na posklejanej sferze: symetria względem bieguna („środkowa") i symetria względem równika są tu tożsame.



Klub 44

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania Nr 10, 11, 12

Termin nadesłania rozwiązań: do 28.II.1982

10. W wyniku działania przedstawionego programu powstaje nieskończony ciąg liczb x (w rozkazie obwiedzionym podwójną ramką). Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny i obliczyć granicę. Poszukać uogólnień.

11. Załóżmy, że W jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, różnym od stałej. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których równanie $W(x) = py$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

12. Niech Z oznacza zbiór 27 punktów przestrzeni tworzących konfigurację następującą: wierzchołki sześcianu — środki jego krawędzi — środki jego ścian — środek całego sześcianu. Ile jest różnych (= nieprzystających) trójkątów o wierzchołkach w punktach zbioru Z?