Geometrie na rozmaitości

Rozmaitość dwuwymiarową (tylko o takich będziemy mówić) określimy następująco: jest to
a) przestrzeń metryczna (a więc dowolnym dwu jej punktom p i q jest przyporządkowana liczba rzeczywista nieujemna $\varrho(pq)$ tak, że są spełnione warunki

$$\varrho(ab) = 0 \leftrightarrow a = b,$$
$$\varrho(ab) = \varrho(ba),$$
$$\varrho(ab)+\varrho(bc) \geqslant \varrho(ac)),$$

b) lokalnie homeomorficzna z płaszczyzną euklidesową (a więc dla dowolnego punktu p i dla małej liczby r zbiór $K_p = \{a : \varrho(ap) < r\}$ można przekształcić na wnętrze koła euklidesowego w sposób ciągły i to tak, że przekształcenie odwrotne też będzie ciągłe),
c) spójna (czyli w jednym kawałku).
Rozważane tu będą tylko rozmaitości *gładkie*, przez co rozumieć będziemy, że homeomorfizmy, o których jest mowa w punkcie *b*, są ze sobą zgodne w tym sensie, że dla punktów zbioru $K_p \cap K_q$ homeomorfizm dla K_p da się uzyskać z homeomorfizmu dla K_q przez złożenie z funkcją dowolną liczbę razy różniczkowalną. Dzięki temu będziemy mogli na rozmaitości mówić o krzywych (przeciwobrazach krzywych rysowanych kawałkami na kołach euklidesowych) i o długościach tych krzywych, stycznych do nich, ich krzywiźnie itd.

Krzywizna to, mówiąc obrazowo, odwrotność promienia okręgu najlepiej w danym punkcie przylegającego do krzywej. Dokładniej można o tym przeczytać np. w Delcie 12/1980 i 1/1981.

Będziemy żądali także, by rozmaitość była *zupełna*, a więc by spełniała warunek: jeśli ciąg (a_n) ma własność Cauchy, tj.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n,m} n, m > N \rightarrow \varrho(a_n a_m) < \varepsilon,$$

to ma granicę należącą do rozmaitości.

Jeśli warunek zupełności zastąpić warunkiem zwartości, a więc domkniętości i ograniczoności, to rozmaitość będzie powierzchnią. (por. Delta 1/1981).

Na rozmaitości będziemy prostymi nazywać geodezyjne, a więc linie, dla bliskich punktów, najkrótsze z łączących te punkty i leżące na rozmaitości. Jeśli rozważymy wszystkie geodezyjne przechodzące przez dany punkt p, to da się ustalić wśród ich krzywizn największą i najmniejszą. Ich iloczyn nazywamy *krzywizną Gaussa* rozmaitości w punkcie p (proszę sprawdzić, że już w myśl tak niedoskonałej definicji można stwierdzić, że np. sfera ma w każdym punkcie krzywiznę dodatnią, płaszczyzna — zerową, a siodło — ujemną).

Dokładnie o geodezyjnych — Delta 2/1981.

Inny sposób określenia krzywizny Gaussa można znaleźć w Delcie 12/1980.

Zauważmy jeszcze, że na tym samym zbiorze można określić różne rozmaitości — mianowicie różnie określając odległość. I tak inną rozmaitość tworzy płaszczyzna z metryką euklidesową, a inną ta sama płaszczyzna z metryką określoną w taki sposób: bierzemy model Kleina płaszczyzny Bolyai-Łobaczewskiego i przekształcamy go na całą płaszczyznę za pomocą funkcji

$$f((x, y)) = (x, y) \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}},$$

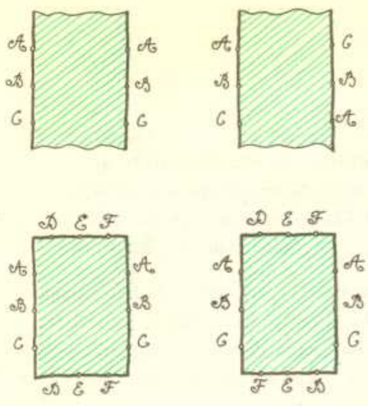
umawiając się, że odległość AB jest równa odległości $f^{-1}(A)f^{-1}(B)$ w modelu Kleina.
Ta druga rozmaitość ma krzywiznę ujemną (ustalenie tego jest trudnym, ale wykonalnym zadaniem), pierwsza zaś — zero.
Geometria gładkich i zupełnych rozmaitości jest nazywana *geometrią Riemanna* i stanowi geometryczne narzędzie ogólnej teorii względności. Niżej zajmiemy się tymi jej szczególnymi przypadkami, które są jednorodne (otoczenia wszystkich jej punktów są takie same). Oczywiście muszą one mieć tę samą krzywiznę w każdym punkcie. Warunek ten okazuje się być również warunkiem wystarczającym na to, by rozmaitości były jednorodne.

Geometrie Riemanna o stałej krzywiźnie

Wyżej podaliśmy przykład dwóch rozmaitości określonych na tym samym zbiorze. Tutaj podamy odpowiedź na pytanie, na jakich zbiorach można określić rozmaitość o stałej krzywiźnie.
Krzywizna dodatnia. Łatwo zauważyć, że są **dwie** takie rozmaitości. Mianowicie *sfera* z naturalną metryką i *płaszczyzna eliptyczna*, ta na półsferze. Obie mają krzywiznę równą $\frac{1}{R^2}$, gdzie R jest promieniem sfery, czy odpowiednio półsfery. Ciekawe natomiast, że każda inna rozmaitość o stałej krzywiźnie dodatniej jest równoważna (ma te same własności), z jedną z wymienionych.

Warto to skonfrontować z artykułem „Geometria na sferze" i „Najregularniejsze i ...".

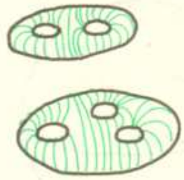
Krzywizna zerowa. Takich jest (z dokładnością do równoważności) *pięć*. Oczywiście jedną z nich jest *płaszczyzna* z metryką euklidesową. A oto jak otrzymać pozostałe cztery.



Pas (nieskończony) sklejamy w *walec*. Oczywiście po sklejeniu krzywizna jest taka jak przed, gdyż żadna odległość na powierzchni się nie zmieniła, a za pomocą odległości da się ustalić krzywiznę.
Albo taki sam pas sklejamy we *wstęgę Möbiusa*. Jeśli przyjmiemy umowę, co do odległości taką samą, jak przy przekształceniu modelu Kleina na całą płaszczyznę (patrz wyżej), to i tu uzyskamy krzywiznę zero, gdyż odległości nie będą zmienione.
Sklejając z kolei prostokąt w *torus* lub w *butelkę Kleina*, z analogiczną umową jak przy wstędze Möbiusa uzyskamy ostatnie dwie rozmaitości o krzywiźnie zerowej.
Krzywizna ujemna. Tu mamy **nieskończenie wiele** możliwości. Jest wśród nich płaszczyzna z metryką uzyskaną wyżej z modelu Kleina. Pozostałe możliwości to między innymi wszystkie n torusy (dla $n > 1$) i n walce (dla $n > 2$).

I tu warto zajrzeć do Delty 1/1981.

3 — walec i 4 — walec.



2 — torus i 3 — torus.

Geometrie eliptyczna, paraboliczna i hiperboliczna

Jeżeli zażądamy od rozmaitości, aby nie tylko miała stałą krzywiznę, lecz także by przez jej dowolne dwa różne punkty przechodziła dokładnie jedna prosta (= geodezyjna), wówczas w każdej z trzech rozpatrzonych wyżej grup pozostanie po jednej rozmaitości. Odpowiednie geometrie noszą właśnie nazwy stanowiące tytuł tego fragmentu. Jak widać geometria paraboliczna miała już przed Riemannem nazwę — to geometria euklidesowa. Podobnie hiperboliczna — to geometria Bolyai-Łobaczewskiego.

Inaczej o tym samym — Delta 7/1975.

Jeśli przez defekt trójkąta $-\Delta(ABC)$ — będziemy rozumieli różnicę π i sumy rozwartości jego kątów, to w każdej z wymienionych płaszczyzn mamy $\Delta(ABC) = K \cdot S_{ABC}$, gdzie K jest krzywizną Gaussa tej płaszczyzny.
A oto np. wzór sinusów w każdej z tych geometrii:

eliptyczna: $$\frac{\sin BC}{\sin\alpha} = \frac{\sin CA}{\sin\beta} = \frac{\sin AB}{\sin\gamma},$$

paraboliczna: $$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

hiperboliczna: $$\frac{\sinh BC}{\sin\alpha} = \frac{\sinh CA}{\sin\beta} = \frac{\sinh AB}{\sin\gamma}.$$

Geometrodynamika

Wyobraźmy sobie świat dwuwymiarowy. Wszystko, o czym powiemy, będzie można łatwo uogólnić na przypadek rzeczywistego świata trójwymiarowego. Niech więc światem będzie na przykład powierzchnia nieskończenie rozległego płaskiego oceanu. Na oceanie mogą jednak rozchodzić się fale. Każdemu rodzajowi fali odpowiada nieeuklidesowa geometria świata powierzchniowego. Co więcej, kształt powierzchni falującego oceanu, a więc i wartość jej krzywizny będzie w każdym punkcie zmieniać się wraz z upływem czasu. Geometria świata powierzchniowego będzie wtedy ewoluować, podobnie jak to czyni geometria świata rzeczywistego.
Szczególnym rodzajem ruchu falowego jest rozchodzenie się fali płaskiej o określonej częstości. Słowo rozchodzenie się jest jednak w tym przypadku nie bardzo właściwe. Każdy punkt oceanu drga bowiem zupełnie tak samo i mówienie o tym, co jest wcześniej a co później, nie ma większego sensu. Trudno na takim nieskończenie i wszędzie jednakowo falującym oceanie mówić o jakimkolwiek upływie czasu. Tym bardziej, że prócz tej powierzchni nasz świat nie zawiera niczego więcej.
Nieskończone fale płaskie o określonej częstości grają w fizyce rolę szczególną. Przez złożenie odpowiedniej ich ilości (zsumowanie bądź scałkowanie) możemy w wyniku interferencji fal o różnych częstościach uzyskać zupełnie dowolny kształt powierzchni oceanu wraz z dowolnymi jego zmianami. W taki też sposób przez interferencję fal świetlnych dostajemy promienie światła — podstawę optyki geometrycznej. Podobnie, odpowiednia interferencja fal materii prowadzi do pojawienia się torów cząstek elementarnych i przeprowadza nas od świata mechaniki kwantowej do mechaniki klasycznej. W obu tych przypadkach interferencja destruktywna (wygaszanie) wszędzie, z wyjątkiem bardzo wąskiego paska przestrzeni (toru promienia lub cząstki), prowadzi do pojawienia się nietrywialnego zjawiska rozchodzenia się, a w konsekwencji i czasu. Cząstka bowiem rozchodzi się z określoną prędkością (prędkością owej grupy interferujących fal) i gdzieś jest najpierw, a gdzie indziej potem. Zupełnie podobnie może być w przypadku geometrii świata.
Wyobraźmy sobie, że różne rodzaje fal płaskich o różnych częstościach to możliwe geometrycznie stany świata powierzchni oceanu. W każdym z nich pojęcie czasu nie ma sensu. Świat prawdziwy powstaje w wyniku interferencji wielu takich fal i ma pewną określoną strukturę geometryczną oraz określony jej rozwój w czasie. Szczęśliwy traf, który musiał kiedyś nastąpić, spowodował, że interferencja różnych form istnienia świata stała się prawie wszędzie destrukcyjna i od tego momentu liczymy upływ czasu i możemy mówić o czterowymiarowej czasoprzestrzeni. ,,Przedtem'' czasu nie było, a właściwie lepiej powiedzieć, że wszędzie były wszystkie możliwe czasy — od początkowego, aż do ostatecznego.
Wydaje się, że taki obraz świata miał na myśli John Archibald Wheeler proponując swą geometrodynamikę. Niestety idea ta nic doczekała się żadnej poważniejszej realizacji.