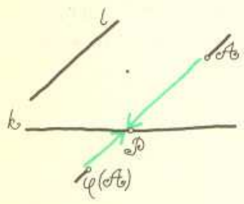
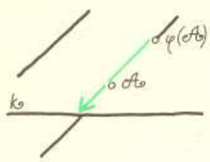
Geometrie na płaszczyźnie afinicznej

PŁASZCZYZNA AFINICZNA

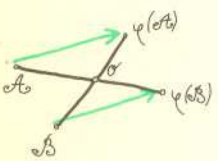


a)



b)

Powinowactwo osiowe. Na rysunku a) mamy $-1 < \lambda < 0$, na b) zaś $\lambda > 1$.



Jeśli O jest środkiem $\overline{A\varphi(B)}$ i $\overline{B\varphi(A)}$, to φ jest przesunięciem.

Metryka ϱ (sposób mierzenia odległości) jest zgodna z daną strukturą liniową, jeśli spełnia warunek: *punkty A, B, C leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(AB)+\varrho(BC) = \varrho(AC)$ lub $\varrho(BC)+\varrho(CA) = \varrho(BA)$ lub $\varrho(CA)+\varrho(AB) = \varrho(CB)$.*

Płaszczyzna afiniczna z metryką Minkowskiego nie ma nic (poza autorem) wspólnego z opisaną w innej części numeru płaszczvzną Minkowskiego

Jeżeli na „zwyczajnej" płaszczyźnie euklidesowej będziemy brali pod uwagę tylko stosunki liniowe, to tak określona dwuwymiarowa przestrzeń będzie (z definicji) *płaszczyzną afiniczną.* Czy warto ją odróżniać od płaszczyzny euklidesowej? Czym się one różnią? Przede wszystkim na płaszczyźnie afinicznej jest większa „swoboda ruchów": każde przekształcenie przeprowadzające proste na proste (czyli *afiniczne*) nic w tej płaszczyźnie nie zmienia (jest *automorfizmem*). Wszystkie takie przekształcenia można otrzymać przez składanie *powinowactw osiowych.* Są to przekształcenia określone przez podanie prostej (*oś*), *kierunku* różnego od kierunku osi i różnej od zera liczby rzeczywistej (*stosunek*) w następujący sposób:
Powinowactwo $(k, [l], \lambda)$ jest (jedynym) przekształceniem φ spełniającym warunki
— proste przechodzą na proste,
— jeśli $A \in k$, to $\varphi(A) = A$,
— jeśli $A \notin k$, to prosta $A\varphi(A)$ ma kierunek $[l]$,
— jeśli prosta $A\varphi(A)$ przecina k w punkcie P, to $\overrightarrow{\varphi(A)P} = \lambda \cdot \overrightarrow{AP}$.
Łatwo zauważyć, że (tw. Talesa) na każdej prostej przekształcenie afiniczne płaszczyzny jest podobieństwem. Oczywiście dla różnych prostych skale tego podobieństwa mogą być różne (ale dla prostych równoległych są takie same — prawda?). W szczególności warto zapamiętać, że: *Przekształcenia afiniczne zachowują stosunek podziału odcinka* (w szczególności środek).
Analitycznie przekształcenia afiniczne to dokładnie wszystkie przekształcenia postaci

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x+\beta y+\mu \\ \bar{y} = \gamma x+\delta y+\nu \end{cases}$$

spełniające warunek

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

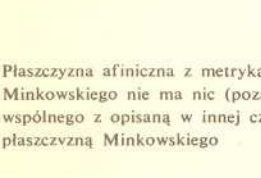
Na płaszczyźnie afinicznej wielu obiektów nie da się odróżnić — np. elipsy od okręgu (bo dają się afinicznie nałożyć — prawda?). Podobnie nie umiemy określić np. obrotu. Ale możemy wyróżnić symetrie środkowe i przesunięcia (oczywiście — jest przecież zachowany środek).

PŁASZCZYZNY LINIOWOMETRYCZNE

Jeżeli na płaszczyźnie afinicznej podamy jakiś sposob mierzenia odległości, zgodny z jej strukturą liniową, to otrzymana w ten sposób płaszczyzna będzie *liniowometryczna.*
Pytanie o wskazanie wszystkich możliwych płaszczyzn liniowometrycznych zostało rozwiązane w 1905 roku przez G. Hamela. W myśl tego, co zostało napisane wyżej stosunki odcinków jednej prostej są w każdej z możliwych metryk takie same. Różnych sposobów obrania metryki jest (jak się okazało) nieskończenie wiele. Tutaj wymienimy dwa sposoby, pochodzące od H. Minkowskiego i D. Hilberta.

METRYKI MINKOWSKIEGO

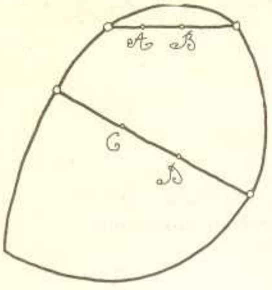
Weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą i mocno wypukłą, to znaczy nie zawierającą odcinków i leżącą po jednej stronie każdej prostej mającej z nią (dokładnie) jeden punkt wspólny. Niech dodatkowo nasza krzywa c ma środek symetrii O (własność afiniczna). Odległość A i B na płaszczyźnie określimy w następujący sposób:
— przesuwamy B o wektor $\overrightarrow{AO}$ i otrzymujemy punkt B',
— znajdujemy punkt P przecięcia krzywej c z półprostą OB',
— $\varrho_c(AB)$ określamy jako stosunek $\overrightarrow{OP}$ do $\overrightarrow{OB'}$.
Taką metrykę nazywamy *metryką Minkowskiego.*
Geometrią liniowometryczną z metryką Minkowskiego — LMM — nazywa się teorię wszystkich płaszczyzn powstałych w wyżej opisany sposób. Dla różnych krzywych otrzymujemy różne płaszczyzny. W geometrii LMM jest jednak (mimo ogólności) dużo twierdzeń. Przytoczymy dwa:
Równoległobok ma przeciwległe boki tej samej długości.
Wszystkie okręgi są jednokładne (a więc jednokładne z krzywą c, bo to przecież okrąg jednostkowy).
Każdy z Czytelników może sam znajdować dalsze twierdzenia.
Szczególny przypadek płaszczyzny LMM, mianowicie gdy krzywa c jest okręgiem, to oczywiście (zwyczajna) płaszczyzna euklidesowa. Nic więc dziwnego, że każde z twierdzeń geometrii LMM jest twierdzeniem geometrii euklidesowej. Nie jest jednak na odwrót — są takie płaszczyzny LMM, że dla niektórych prostych na nich nie istnieje symetria osiowa (np. gdy krzywa c jest taka jak na rysunku — proszę sprawdzić).



Odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ mają tę samą długość Minkowskiego (wyznaczoną przez obranie krzywej c). Konkretnie $\varrho_c(AB) = \varrho_c(CD) = 3$.

METRYKI HILBERTA

Płaszczyzna afiniczna z metryką Hilberta nie ma nic (poza autorem) wspólnego ze znaną skądinąd przestrzenią Hilberta.



Odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ mają tę samą długość Hilberta (wyznaczoną przez obranie krzywej c).

Znów weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą i mocno wypukłą c. Nie będziemy tym razem żądali, by miała ona środek symetrii, ale też podana niżej metryka Hilberta nie będzie określona dla całej płaszczyzny, a tylko dla wnętrza obranej krzywej. Robi się to tak:

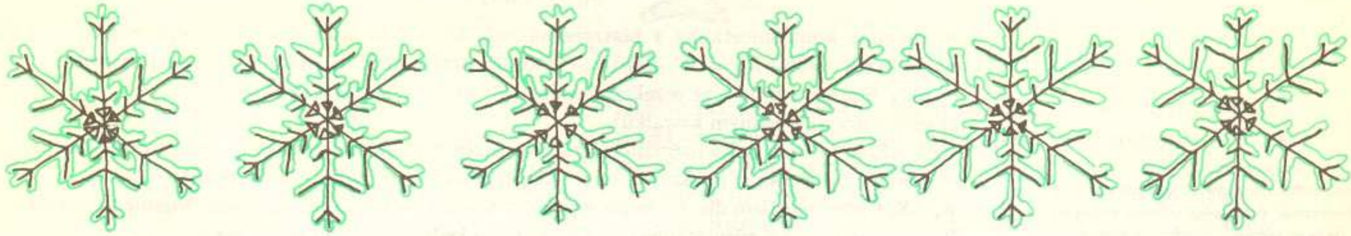
— znajdujemy punkty P i Q przecięcia prostej AB z krzywą c,

— znajdujemy iloraz stosunku podziału odcinka $\overline{PQ}$ punktem A przez stosunek podziału odcinka $\overline{PQ}$ punktem B,

— $\varrho^c(AB)$ określamy jako wartość bezwzględną logarytmu tego ilorazu.

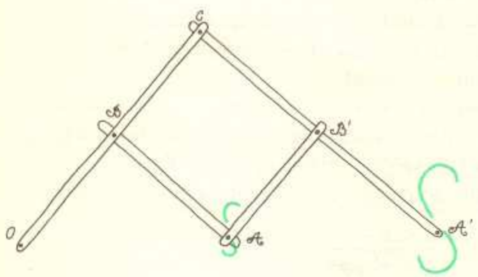
W ten sposób możemy zmetryzować dowolną mocno wypukłą i ograniczoną figurę na płaszczyźnie afinicznej.

Geometrią liniowometryczną z metryką Hilberta — LMH — nazywa się teorię wszystkich tak otrzymanych obiektów (płaszczyzn LMH). Płaszczyzn LMH jest wiele i są bardzo różne. Każdy z Czytelników może spróbować poszukać twierdzeń geometrii LMH. Wszystkie te twierdzenia będą twierdzeniami geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, bo gdy krzywa c jest okręgiem, to płaszczyzna LMH okazuje się (zwyczajną) płaszczyzną Bolyai-Łobaczewskiego.

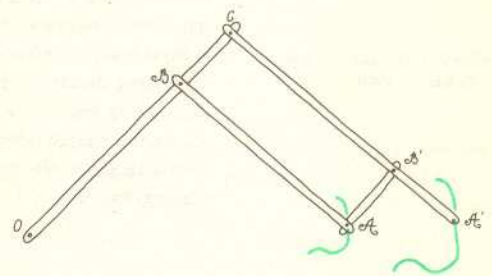


KONKURS — budujemy symetrograf.

Wszyscy znamy prosty przyrząd kreślarski zwany pantografem. Składa się on z czterech listewek połączonych przegubowo tak, jak to pokazuje rysunek. Gdy punkt O unieruchomimy, punkt A' będzie w każdym położeniu pantografu obrazem punktu A przy pewnej jednokładności (u nas w skali 2) względem punktu O. Zmieniając położenie listewek tak, jak to pokazuje następny rysunek, możemy łatwo uzyskać inne skale jednokładności. Przyrząd nasz umożliwia więc łatwe przerysowywanie danego rysunku w dowolnej skali.



$AB = B'C = BC = AB' = OB = A'B'$ i $A'B'C$ są współliniowe. Stąd $AB \| B'C$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OCA'$ i $\triangle OBA \sim \triangle OCA'$. Wobec tego OAA' są współliniowe $OA' : OA = OC : OB = 2$.



OAA' są współliniowe i $OA' : OA = OC : OB = A'C : B'C$.

Pora na zadanie konkursowe: proponujemy Wam, Czytelnicy, zastanowienie się nad budową *symetrografu*, czyli takiego mechanizmu przegubowego, który przy unieruchomieniu jednego lub więcej punktów i przesuwaniu ustalonego punktu po danej figurze rysuje innym punktem jej obraz przy symetrii względem danej prostej. Przyrząd nie może zawierać połączeń innych, niż przegubowe, w szczególności wykluczamy połączenia suwakowe.

To ostatnie zastrzeżenie jest uzasadnione tym, że o ile dostatecznie precyzyjne połączenie przegubowe można uzyskać łącząc listwy zwykłym gwoździem, o tyle wykonanie suwaka (prostowodu) jest już trudnym zadaniem mechanicznym.

Praca konkursowa powinna zawierać projekt symetrografu z dowodem poprawności jego działania oraz działający model urządzenia. Obie części pracy będą oceniane oddzielnie.

Nie proponujemy zadania nierozwiązalnego. Redakcja zna symetrograf składający się z 18 listewek. Czy można go uprościć — to już zechcą nam powiedzieć uczestnicy konkursu.

Prace konkursowe oceniać będzie jury w składzie

1. dr Jerzy Bednarczuk
2. dr Marek Kordos
3. dr Krzysztof Prażmowski

Termin nadesłania prac: 1 marca 1982 roku.

Za najlepsze prace przyznane będą nagrody. Najlepszą konstrukcję opiszemy w „Delcie".

Zachęcamy do wzięcia udziału w konkursie.

Errata

W numerze 10/1981 w komentarzu redakcyjnym do artykułu dr Zbigniewa Sawonia „O iteracji przejść granicznych" podaliśmy nieprawdziwe twierdzenie.

Oto poprawna wersja: Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny, funkcje f_n różniczkowalne, a szereg pochodnych $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ jest zbieżny jednostajnie w pewnym otoczeniu punktu x, to pochodna sumy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ istnieje i jest sumą pochodnych składników.

Przepraszamy dr Sawonia i naszych Czytelników.