Geometria świata kwarków

Zgodnie z definicją podaną w 1911 roku przez Ernesta Rutherforda, jądro atomowe to taka część atomu, która oddziałuje z cząstkami naładowanymi elektrycznie niezgodnie z prawem Coulomba. Składniki jądra, nukleony, związane są specyficznymi siłami oddziaływań jądrowych (częściej zwanych silnymi), które mogą być badane jedynie przez śledzenie owych odstępstw od prawa Coulomba. Choć obecnie znamy bardzo dużo cząstek (są to tzw. hadrony, patrz Delta 2/1979) biorących udział w oddziaływaniach silnych, to jednak natura tych oddziaływań wciąż nie została w pełni poznana. Wiemy jedynie, że hadrony składają się z pewnych subcząstek — kwarków i że oddziaływania silne polegają na permanentnym dla kwarków byciu wewnątrz hadronów. Same kwarki są odpowiedzialne za całość oddziaływań elektromagnetycznych (i słabych) hadronów. Na czym polega bycie wewnątrz hadronów — nie wiemy.
W jednym z modeli opisujących zachowanie się hadronów, kwarki są połączone ze sobą pewnym patyczkiem, tzw. struną niezbyt jasnego pochodzenia. I tak na przykład niektóre mezony składają sie z pary bezmasowych kwarków (kwark — antykwark) połączonych struną i obracających się dokoła siebie z prędkością światła. Zamiast zastanawiać się nad tym, skąd się wzięła struna, rozważmy nieco dokładniej wewnętrzną geometrię naszego tworu. Jak zobaczymy, nie bardzo przypomina on obracający się odcinek z końcami, czyli koło. Tak by było jedynie wtedy, gdybyśmy posłużyli się naturalną, klasyczną mechaniką newtonowską. Bardziej odpowiednią jest jednak teoria względności, szczególnie dla prędkości bliskich prędkości światła. W teorii tej wszystkie poruszające się ciała ulegają skróceniu w kierunku ruchu:

$$l = l_0\sqrt{1-v^2/c^2},$$

gdzie l_0 — długość ciała w spoczynku, v — jego prędkość, zaś c — prędkość światła.
Wprowadźmy układ odniesienia obracający się razem ze struną. Jest to najbardziej naturalny, własny układ odniesienia mezonu. W układzie tym punkty na okręgu o promieniu r poruszają się z prędkością $r\cdot\omega$, gdzie ω jest prędkością kątową obrotu. Promień r nie ulega skróceniu, gdyż jest prostopadły do kierunku ruchu. Zmienia się natomiast obwód koła poruszający się z prędkością $\omega\cdot r$:

$$l = 2\pi r \Big/ \sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Tak więc stosunek obwodu koła do jego promienia zmienia się od 2π dla bardzo małych wartości r do ∞ dla $r = c/\omega$. Zatem wewnętrzna geometria mezonu to geometria modelu Kleina o promieniu c/ω, czyli geometria Bolyai-Łobaczewskiego. Być może na tym właśnie polega permanentne uwięzienie kwarków w hadronach. Wtedy oddziaływania silne demonstrowałyby szczególne cechy geometryczne świata, w którym żyją kwarki. Byłby to świat (patrząc z zewnątrz) zamknięty w kuli o promieniu rzędu 10^{-13} cm. Oddziaływania silne miałyby, podobnie jak grawitacja, naturę czysto geometryczną.

Homografie

Homografie to inna nazwa funkcji liniowo-wymiernych, czyli funkcji postaci

$$f(x) = \frac{ax-b}{cx-d}, \qquad \text{gdzie } ad-bc \neq 0.$$

(Gdy $c = 0$, to f jest zwykłą funkcją liniową.)
Zobaczmy, jak wygląda wykres takiej funkcji dla $c \neq 0$. Dla $x = d/c$ f jest nieokreślona (możemy powiedzieć $f(d/c) = \infty$). Właściwie, to nawet gorzej — w d/c f nie ma granicy:

$$\lim_{x\to d/c^-} f(x) = -\mathrm{sgn}\,(a/c).\ \infty, \quad \lim_{x\to d/c^+} f(x) = \mathrm{sgn}\,(a/c).\ \infty$$

($\mathrm{sgn}\,(e) = 1$, gdy $e > 0$ i -1, gdy $e < 0$).
Możemy też napisać nieco inaczej

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{ad-bc}{c}}{cx-d},$$

skąd otrzymujemy granicę f w nieskończoności: $\frac{a}{c}$.

Ponadto oznaczając $A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{ad-bc}{c^2}$, $D = d/c$ mamy

$f(x) = A + \frac{B}{x-D}$, a to znaczy, że wykresem homografii jest hiperbola o asymptotach $x = d/c$ i $y = a/c$. Stąd też zauważamy, że homografia jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem prostej bez punktu d/c na prostą bez a/c. Można, formalnie, dołączyć do prostej punkt ∞; wtedy homografia jest bijekcją rozszerzonej tak prostej na siebie.
Takim samym wzorem określone przekształcenia można też badać na płaszczyźnie zespolonej (czyli w ciele liczb zespolonych). Homografie zespolone zachowują rodzinę okręgów i prostych, co więcej, są konforemne, czyli zachowują kąty między krzywymi. A co jeszcze więcej, każda funkcja konforemna i zachowująca orientację jest homografią.
Gdyby nie żądać zachowania orientacji, rozwiązaniem byłyby homografie i homografie sprzężone, czyli funkcje dane wzorem

$$f(x) = \frac{a\bar{x}-b}{c\bar{x}-d}, \qquad ad-bc \neq 0.$$

Inwersja względem okręgu o środku a i promieniu r na takiej płaszczyźnie zapisze się wzorem

$$i(z) = \frac{r^2}{z-a} + a, \text{ będzie więc homografią.}$$

Ale, co może ważniejsze — to taka sama inwersja, jak ta opisana w artykule ,,Geometria na sferze"; każda homografia jest złożeniem pewnej ilości inwersji, a więc podobieństwa płaszczyzny Möbiusa to homografie płaszczyzny zespolonej.

Rozwiązanie zadania M 281. Zauważmy, że w modelu Kleina okrąg współśrodkowy z ,,brzegiem" modelu jest okręgiem hiperbolicznym. Wystarczy teraz zauważyć, że gdy okrąg ten ma promień większy, niż połowa promienia koła stanowiącego model, to opisanie na tym okręgu trójkąta jest niemożliwe.