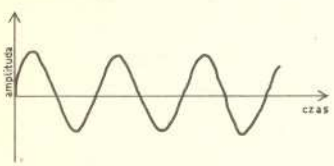
Drgania stochastyczne i trwałość konstrukcji

Doc. dr Kazimierz SOBCZYK

Realne układy fizyczne, w szczególności współczesne konstrukcje, narażone są na działanie czynników zewnętrznych, których przebieg w czasie jest bardzo nieregularny i przypadkowy. W rezultacie takich wymuszeń powstają drgania elementów i całej konstrukcji. Ich obraz graficzny (oscylogram) jest jednak na tyle skomplikowany, iż tradycyjna analiza drgań, przywykła do zwykłych — najczęściej okresowych — funkcji czasu, staje się bezradna.
Jak charakteryzować różne skomplikowane i przypadkowe wymuszenia zewnętrzne? Jaka informacja mieści się we wspomnianych bardzo chaotycznych oscylogramach? Jak ją charakteryzować i wykorzystywać w ocenie negatywnych skutków owych drgań na człowieka i na niezawodność konstrukcji?
Z pomocą przychodzi teoria procesów stochastycznych — obszerna dziedzina współczesnej matematyki badająca prawidłowości zjawisk losowych przebiegających w czasie.

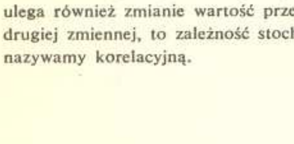
Wprowadzenie

Bardzo istotną rolę w wielu dziedzinach współczesnej techniki i nauki odgrywa zjawisko ruchu drgającego. Ograniczając się do zjawisk natury mechanicznej wystarczy wymienić takie przykłady jak: drgania lub wibracje maszyn i ich elementów, drgania samochodów przy ich ruchu po nierównościach, drgania powłok samolotowych czy statków morskich. Poza tym drgania są nierozłącznie związane z takimi procesami fizycznymi jak: rozchodzenie się dźwięku w powietrzu, deformacji w ciałach stałych itp.
Potoczne rozumienie drgań pochodzące z codziennych obserwacji jest, jak się wydaje, wystarczająco jasne. Zwykle mówi się (także w teorii drgań), że układ mechaniczny wykonuje ruch drgający, jeżeli wielkości charakteryzujące go zmieniają się w czasie w sposób oscylacyjny, tj. rosnąc i malejąc na przemian. Najprostszym i naturalnym sposobem zapisu ruchu drgającego jest zależność okresowa, najczęściej sinusoidalna (Rys. 1). Taka sinusoidalna (lub harmoniczna) aproksymacja drgań stanowiła przez długi czas podstawę analizy drgań realnych układów fizycznych. W celu bardziej adekwatnego opisu rzeczywistych ruchów wibracyjnych rozważa się też tzw. drgania prawie okresowe i nieokresowe. Niezależnie jednak od matematycznego przedstawienia drgań i ich nieregularności istotny jest fakt, że w klasycznej czyli tradycyjnej teorii traktowane są one jako zjawisko deterministyczne; znaczy to, że eksperymenty przeprowadzone wiele razy w tych samych warunkach dają taki sam (lub bardzo zbliżony) zapis oscylograficzny. Struktura układów nowoczesnej techniki, a przede wszystkim skomplikowany, fluktuacyjny charakter wymuszeń zewnętrznych sprawiają, iż tego rodzaju opis staje się w wielu sytuacjach mało przydatny. Ta niewystarczalność deterministycznego opisu uwydatniła się w sposób jaskrawy wraz z rozwojem konstrukcji, w których precyzja działania i wysoka niezawodność są szczególnie ważne (statki kosmiczne, samoloty odrzutowe itp.).
Okazało się, że przypadkowy, fluktuacyjny charakter wielu rzeczywistych ruchów drgających musi być wyrażony w sposób jawny — przez użycie w ich opisie teorii prawdopodobieństwa, a dokładniej — teorii procesów stochastycznych ujmującej przypadkowe zjawiska dynamiczne w terminach zdarzeń, prawdopodobieństw i wartości średnich. Przypadkowy lub stochastyczny charakter ruchu drgającego ujawnia się tym, iż eksperymenty przeprowadzone wiele razy w tych samych warunkach dają za każdym razem inny zapis oscylograficzny (Rys. 2). W takiej sytuacji jeden zapis przestaje mieć znaczenie, bowiem informacja o dynamice zawarta jest w całym zespole realizacji ruchu. W ten sposób dochodzi się do pojęcia drgania przypadkowego, lub — lepiej — stochastycznego. A zatem, drganie stochastyczne jest to ruch drgający przedstawiony za pomocą procesu stochastycznego $X(t, \gamma)$, tj. funkcji, która zależy nie tylko od czasu t ale także od przypadku (γ jest zdarzeniem elementarnym). Najprostszym przykładem drgania stochastycznego jest drganie harmoniczne, którego amplituda i faza są losowe. W takim przypadku wszystkie realizacje drgania mają taką samą sinusoidalną postać jako funkcja czasu; są jednakże nieregularnie przesunięte względem siebie i mają różne amplitudy. Istotny jest fakt, że szeroką klasę drgań stochastycznych można otrzymać w wyniku superpozycji takich elementarnych drgań przypadkowych.
Ruch każdego układu fizycznego (o skończonej liczbie stopni swobody) jest zdeterminowany przez trzy podstawowe grupy wielkości: a) warunki początkowe, tj. wielkości charakteryzujące początkowy stan układu; b) parametry charakteryzujące własności układu (i występujące w odpowiednich równaniach ruchu jako współczynniki); c) wymuszenia zewnętrzne. Jeżeli wymienione wielkości (niektóre lub wszystkie) są losowe, to również ruch — w szczególności ruch drgający — jest ruchem stochastycznym. W badaniu dynamiki konstrukcji inżynierskich podstawowe znaczenie ma przypadkowość wymuszeń zewnętrznych. Drgania konstrukcji przy przypadkowych wymuszeniach stały się ważną dziedziną współczesnej mechaniki i im poświęcimy naszą uwagę.



Rys. 1. Drganie harmoniczne.

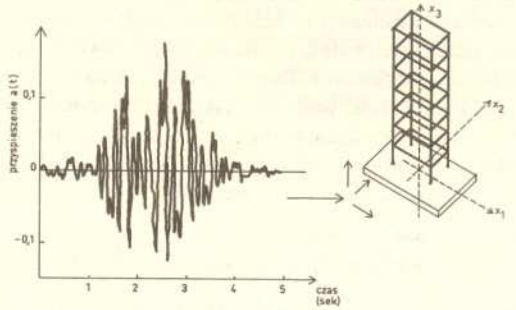
Pomiędzy zmiennymi losowymi X i Y może zachodzić zależność funkcyjna, może się też zdarzyć, że ze zmianą wartości jednej zmiennej zmienia się rozkład prawdopodobieństwa drugiej. Tego rodzaju zależność nazywamy stochastyczną. Jeżeli ulega również zmianie wartość przeciętna drugiej zmiennej, to zależność stochastyczną nazywamy korelacyjną.



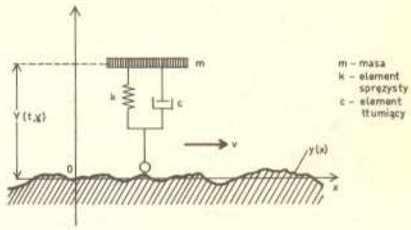
Rys. 2. Realizacja procesu stochastycznego.

Charakterystyka wymuszeń przypadkowych

Wymuszenia lub obciążenia działające na konstrukcje współczesnej techniki mają często bardzo chaotyczny i nieregularny przebieg w czasie. Przykładem takiego obciążenia może być ciśnienie pochodzące od porywistego wiatru. Inny przykład to siły powstające przy działaniu fal morskich na konstrukcje statków; fale morskie nie mają, jak wiadomo, charakteru regularnego w czasie i przestrzeni, a poprawny opis działania tych fal na konstrukcje jest oparty na przedstawieniu ich w postaci procesu stochastycznego. Działanie sejsmiczne charakteryzujące się ruchem gruntu ma również charakter stochastyczny (Rys. 3). Jeszcze jednym ważnym przykładem wymuszenia stochastycznego jest działanie strumienia turbulentnej atmosfery na powłokę samolotu. Wreszcie sytuacja dobrze znana każdemu z codziennych doświadczeń — ruch samochodu po nierównościach drogi. Można przyjąć, że nierówności są rozłożone w sposób przypadkowy, zatem również ich działanie w czasie na koła samochodu ma charakter stochastyczny i wywołuje drgania stochastyczne pojazdu (Rys. 4).



Rys. 3. Typowy zapis wymuszenia sejsmicznego i działanie na budowlę.



Rys. 4. Uproszczony model pojazdu poruszającego się po przypadkowych nierównościach nawierzchni; masa m wykonuje drgania stochastyczne opisane przez $Y(t, \gamma)$.

Aby można było przeprowadzić analizę drgań wymuszanych siłami takimi, jak wymienione wyżej, należy coś wiedzieć o procesie stochastycznym charakteryzującym (matematycznie) owe wymuszenia. Informację tę otrzymujemy z badań doświadczalnych. Zbierane w odpowiednio zaplanowany sposób obserwacje liczbowe są opracowywane metodami statystyki. Otrzymanie pełnej informacji o procesie stochastycznym w postaci rozkładów prawdopodobieństwa jego wartości jest trudne. Toteż w praktyce wymuszenia losowe charakteryzuje się najczęściej w sposób prostszy przez podanie częściowej informacji w postaci wartości średnich rozważanego procesu. Najprostszą taką wielkością jest wartość przeciętna (oczekiwana) procesu

(1) $$\langle X(t,\gamma)\rangle = m_X(t)$$

charakteryzująca „uśrednione" (po wszystkich możliwych realizacjach) zachowanie się procesu (linia przerywana na Rys. 2). Aby scharakteryzować wzajemną zależność między wartościami procesu $X(t, \gamma)$ w różnych chwilach czasu wprowadza się natomiast tzw. funkcję korelacyjną procesu

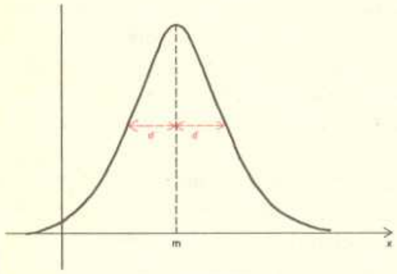
(2) $$K_X(t_1, t_2) = \langle X(t_1,\gamma)X(t_2,\gamma)\rangle.$$

Dwie wymienione funkcje dostarczają istotnej informacji o badanym procesie stochastycznym, a ich wyznaczenie z doświadczeń nie nastręcza trudności (dla wyznaczania funkcji korelacyjnej z danych doświadczalnych zostały skonstruowane i są używane odpowiednie urządzenia zwane korelatorami). Dodajmy, że jeśli można przyjąć (a często takie założenie jest uzasadnione), iż proces stochastyczny jest taki, że rozkłady prawdopodobieństwa jego wartości są gaussowskie (Rys. 5), to te dwie funkcje charakteryzują w pełni rozważany proces.

Jeżeli w procesie stochastycznym $X(t)$ związki probabilistyczne nie ulegają zmianie przy przesunięciu w czasie, to wartość przeciętna $E[X(t)] = m$ nie zależy od czasu. Funkcję

$$K(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - m^2$$

nazywamy funkcją korelacyjną procesu $X(t)$.

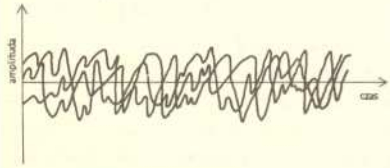


Rys. 5. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu gaussowskiego.

Teoria drgań stochastycznych korzysta bardzo często z dalszego uproszczenia. Otóż okazuje się, że wiele rzeczywistych obciążeń przypadkowych może być opisane przez tzw. procesy stacjonarne, tj. procesy, których charakterystyki nie zmieniają się przy przesunięciu skali czasu (charakter fluktuacji nie zależy od konkretnej chwili). Rysunek 6 pokazuje realizacje procesu stacjonarnego. Dla takich procesów m_X jest wielkością stałą, zaś $K_X(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K_X(\tau)$. Bardzo ważny jest fakt, że dla procesów stacjonarnych istnieje wygodny w praktyce aparat analizy widmowej, analogiczny w swej idei do analizy harmonicznej zwykłych funkcji — często używanej w różnych działach fizyki (akustyka, optyka) do charakteryzowania procesów (np. fal) za pomocą pojęcia częstości. Podstawową wielkością w analizie procesów stacjonarnych jest gęstość widmowa procesu $g_X(\omega)$, gdzie ω jest częstością. Między funkcją korelacyjną i gęstością widmową istnieje wzajemny związek: mianowicie, jeżeli proces przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to

(3) $$K_X(\tau) = \int_0^\infty g_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega,$$

(4) $$g_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$



Rys. 6. Realizacja procesu stacjonarnego.

Zauważmy, że zgodnie z określeniem funkcji korelacyjnej (wzór (2)) jej wartość dla tych samych wartości czasu, tj. dla $t_1 = t_2 = t$ daje tzw. średni kwadrat procesu, czyli $K_X(t, t) = \langle X^2(t) \rangle$. W przypadku procesu stacjonarnego mamy zatem

$$(5) \qquad \langle X^2(t) \rangle = K_X(0) = \int_0^\infty g_X(\omega) d\omega .$$

Ponieważ w licznych zastosowaniach wartość $\langle X^2 \rangle$ charakteryzuje energię rozważanego procesu, to zgodnie ze wzorem (5) $g_X(\omega)$ jest też nazywana gęstością widmową energii. Zgodnie z interpretacją pojęcia gęstości, iloczyn $g_X(\omega)d\omega$ określa tę część energii procesu, która zawarta jest w przedziale częstości od ω do $\omega + d\omega$. Wyznaczanie gęstości widmowej z danych doświadczalnych jest stosunkowo proste; dużą pomoc stanowią specjalne urządzenia zwane analizatorami widmowymi.

Okazuje się, że takie wymuszenia przypadkowe jak: obciążenie wiatrem, fluktuacje prędkości i ciśnienia w strumieniu turbulentnym, szum silników odrzutowych czy wymuszenie drgań pojazdu poruszającego się ze stałą prędkością po nierównościach realnych dróg mogą być traktowane jako procesy stacjonarne. Dla procesów tych były wyznaczane na podstawie doświadczeń funkcje korelacyjne i gęstości widmowe. Na przykład, doświadczalne badania nierówności dróg o różnej nawierzchni prowadzone w różnych krajach (Japonia, Niemcy, ZSRR) wykazały, iż funkcje korelacyjne profilów (wzdłuż kierunku jazdy) tych dróg $y(x)$ można z wystarczającą dokładnością przybliżać następującymi wyrażeniami

$$(6) \qquad K_y(\tilde{x}) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tilde{x}|},$$

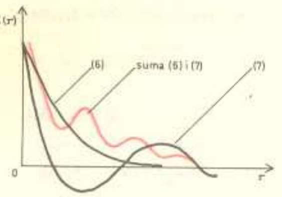
$$(7) \qquad K_y(\tilde{x}) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tilde{x}|} \cos\beta\tilde{x}, \qquad \tilde{x} = x_2 - x_1 \qquad \text{lub ich kombinacją.}$$

Ponieważ rozważamy sytuację, kiedy pojazd porusza się ze stałą prędkością v, czyli $x = vt$, $\tilde{x} = v\tau$, to funkcję korelacyjną wymuszenia działającego w czasie na koła pojazdu $X(t, \gamma) = y(vt)$ otrzymujemy bezpośrednio z powyższych wyrażeń podstawiając w miejsce α i β odpowiednio $\alpha_1 = v\alpha$, $\beta_1 = v\beta$. Czytelnik z łatwością zauważy, że przypadek, kiedy pojazd porusza się ze zmienną prędkością, jest bardziej skomplikowany. Rysunek 7 przedstawia wykresy funkcji korelacyjnych (6) i (7), zaś Rys. 8 obrazuje odpowiadające tym funkcjom gęstości widmowe, które (po obliczeniu całki (4)) przyjmują postać

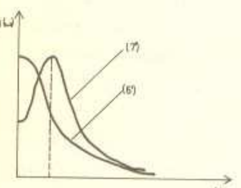
$$(6') \qquad g(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha v}{\omega^2 + \alpha^2 v^2},$$

$$(7') \qquad g(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha v}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 v^2 + \beta^2 v^2}{(\omega^2 - \beta^2 v^2 - \alpha^2 v^2)^2 + 4\alpha^2 v^2 \omega^2}.$$

W zależności od rodzaju nawierzchni (np. droga brukowana, asfalt, asfalt na betonie itp.) stałe σ^2, α, β przyjmują różne wartości; np. dla szosy o przeciętnej nawierzchni asfaltowej badanej w Japonii $\sigma = 1{,}21$ cm, $\alpha = 0{,}18$, $\beta = 0{,}54$.



Rys. 7. Funkcje korelacyjne wymuszeń pochodzących od nierówności drogi.



Rys. 8. Gęstości widmowe odpowiadające funkcjom korelacyjnym na Rys. 7.

Reakcja konstrukcji na wymuszenie stochastyczne

Jak reaguje układ fizyczny czy konstrukcja na wymuszenie o charakterze przypadkowym? Oczywiście, reakcja konstrukcji i zmienność tej reakcji w czasie są również przypadkowe; innymi słowy reakcja konstrukcji jest opisana procesem stochastycznym $Y(t, \gamma)$. Podstawowy problem teorii drgań stochastycznych polega więc na scharakteryzowaniu procesu $Y(t, \gamma)$, gdy dana jest informacja o wymuszeniu $X(t, \gamma)$ i określone są własności badanego układu. Badanie takiego problemu pochłaniało uwagę mechaników i matematyków przez wiele lat, począwszy od połowy lat pięćdziesiątych. W celu wskazania istoty zagadnienia rozważmy tzw. czasowo-niezmienny, liniowy układ o jednym stopniu swobody. Taki układ stanowi wygodny model w analizie drgań wielu rzeczywistych konstrukcji. Liniowość układu oznacza, że relacja między wymuszeniem $X(t, \gamma)$ i reakcją $Y(t, \gamma)$ jest liniowa (w odpowiednich równaniach opisujących dynamikę nie występują potęgi $Y(t, \gamma)$ inne niż pierwsza). Układ jest czasowo niezmienny (lub stacjonarny), jeżeli jego własności (masa, tłumienie itp.) są stałe w czasie ruchu; jest to warunek spełniony w większości podstawowych konstrukcji inżynierskich. Jeden stopień swobody wskazuje, iż model jest na tyle prosty, że reakcja w każdej chwili jest całkowicie scharakteryzowana przez jedną wielkość Y; okazuje się, że informacje otrzymane z analizy takiego uproszczonego modelu charakteryzują również dynamikę układów bardziej złożonych, o wielu stopniach swobody a nawet tzw. układów ciągłych — o nieprzeliczalnej ilości stopni swobody (np. belki, płyty, powłoki itp.). Liniowe układy czasowo-niezmienne mają tę własność, że jeżeli wymuszenie jest sinusoidalne, lub — w postaci zespolonej — harmoniczne ($X = e^{i\omega t}$), to reakcja jest również harmoniczna o tej samej częstości, przy czym amplituda reakcji zależy od częstości, tj. $Y = H(\omega)e^{i\omega t}$. Wielkość $H(\omega)$ jest więc częstotliwościową charakterystyką dynamiki rozważanego układu. Jej znajomość dla wszystkich wartości częstości daje informację potrzebną do otrzymania reakcji układu na dowolne znane wymuszenie. Funkcję $H(\omega)$ można stosunkowo prosto wyznaczyć eksperymentalnie. W analizie teoretycznej otrzymuje się ją łatwo z odpowiednich, różniczkowych równań drgań podstawiając w nich w miejsce X i Y wskazane wyżej wielkości harmoniczne.

Korzystając z pewnych faktów dotyczących stacjonarnych procesów stochastycznych oraz układów liniowych otrzymuje się rezultat: jeżeli na układ liniowy o charakterystyce częstotliwościowej $H(\omega)$ działa wymuszenie stochastyczne stacjonarne $X(t, \gamma)$ o gęstości widmowej $g_X(\omega)$, to gęstość widmowa reakcji układu na to wymuszenie wyraża się wzorem

$$g_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 g_X(\omega). \tag{8}$$

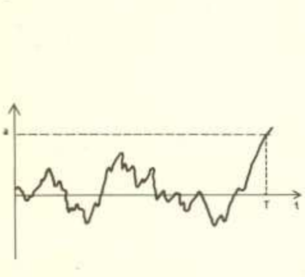
Powyższy wzór stanowi jedną z podstawowych relacji w teorii drgań stochastycznych układów liniowych. Jak już wiemy, znając $g_Y(\omega)$ można łatwo, na podstawie wzorów (3) i (5), wyznaczyć funkcję korelacyjną $K_Y(\tau)$ czy średni kwadrat reakcji konstrukcji $\langle Y^2 \rangle$.
Jeżeli badany układ jest bardziej złożony — jest układem o wielu stopniach swobody — ale dalej pozostaje liniowy, to ogólna zasada wyznaczania charakterystyk statystycznych reakcji jest taka sama. Inaczej ma się sprawa, jeżeli ruch układu musi być opisany równaniami nieliniowymi. Ale i w tym przypadku zostały opracowane metody pozwalające charakteryzować reakcję; są one jednak pod względem rachunkowym bardziej zawiłe i w większości przybliżone.
Wróćmy do przykładu związanego z ruchem pojazdu po nierównej drodze. Przyjmując, że gęstość widmowa profilu drogi jest określona wzorem (5) a model pojazdu jest taki jak na Rys. 4, otrzymujemy łatwo na podstawie wzoru (8) wyrażenie dla gęstości widmowej drgań masy m oraz po wykonaniu całkowania następujący wzór dla średniego kwadratu przemieszczenia pionowego

$$\langle Y^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2h} \, \frac{(4h^2 + \omega_0^2)\alpha v + 2h\omega_0^2}{\alpha^2 v^2 + 2h\alpha v + \omega_0^2}, \tag{9}$$

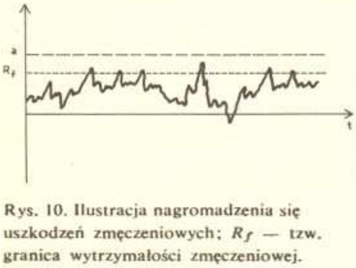
gdzie h jest współczynnikiem tłumienia zawieszenia, zaś ω_0 — tzw. częstość drgań własnych — charakteryzuje własności sprężyste zawieszenia. Powyższy wzór dostarcza istotnej informacji; wyraża on wartość średnią kwadratu przemieszczenia pionowego masy w zależności od wariancji pionowych nierówności drogi σ^2, parametru charakteryzującego przestrzenną korelację nierówności profilu α, prędkości ruchu pojazdu v oraz parametrów charakteryzujących zawieszenie h i ω_0. Można też otrzymać odpowiedni rezultat dla średniego kwadratu pionowego przyspieszenia $\langle \ddot{Y}^2 \rangle$ masy w ruchu drgającym — wielkości, która stanowi bodajże najważniejszy parametr charakteryzujący tzw. komfort jazdy. Tego rodzaju rezultat pozwala z kolei tak dobrać parametry zawieszenia h i ω_0, aby ów średni kwadrat przyspieszeń pionowych (powodowany przypadkowymi nierównościami) osiągnął wartość minimalną. Takie postępowanie (oczywiście dla bardziej złożonych modeli pojazdu) prowadzi do zwiększenia komfortu jazdy i jest stosowane w projektowaniu.

Uszkodzenie konstrukcji na skutek drgań stochastycznych

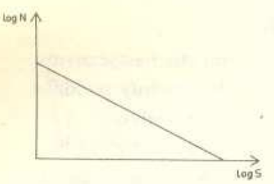
Następne, w sposób naturalny wyłaniające się problemy związane z drganiami stochastycznymi, dotyczą skutków, które one wywołują. Jest rzeczą znaną, że konstrukcje i ich elementy poddane obciążeniom zmiennym w czasie podlegają niszczeniu nawet wtedy, gdy żadne z wielkości normowych nie zostają przekroczone. Ma to również (a może przede wszystkim) miejsce, gdy owe obciążenia zmieniają się w czasie w sposób przypadkowy, a konstrukcja wykonuje drgania stochastyczne. Niech $Y(t, \gamma)$ — jak poprzednio — oznacza reakcję konstrukcji (przemieszczenie, naprężenie itp.) w ustalonym punkcie krytycznym; przy tym owa reakcja ma charakter stochastyczny i znane są jej podstawowe cechy statystyczne. Istotne jest pytanie: jak wykorzystać informacje o procesie $Y(t, \gamma)$ w badaniu uszkodzeń i w ocenie trwałości konstrukcji? Nie ma potrzeby wykazywać, jak ważna dla praktyki inżynierskiej jest odpowiedź na to pytanie. Odpowiedź nie jest jednak prosta, a nawet nie zawsze jest możliwa. W celu uzyskania informacji o trwałości konstrukcji należy przede wszystkim wziąć pod uwagę różne możliwe mechanizmy uszkodzeń związane z drganiami stochastycznymi. Dwa takie mechanizmy są niewątpliwie podstawowe. Pierwszy mechanizm zniszczenia polega na tym, że uszkodzenie konstrukcji występuje wtedy, gdy reakcja $Y(t, \gamma)$ osiąga po raz pierwszy pewien określony górny (np. a) lub dolny (np. b) poziom, gdzie a i b są danymi dużymi liczbami dodatnimi. Mówimy, że uszkodzenia występujące przy zajściu tego zdarzenia są uszkodzeniami katastroficznymi (lub uszkodzeniami pierwszego przejścia; ang. — first excursion failures — por. Rys. 5). Druga możliwość jest następująca: reakcja $Y(t, \gamma)$ nie przyjmuje dużych (katastroficznych) wartości, doznaje jednak wielu nieznacznych wyjść poza pewną granicę (tzw. granicę wytrzymałości zmęczeniowej) i wobec tego zniszczenie konstrukcji akumuluje się; całkowite zniszczenie następuje wtedy, gdy nagromadzone uszkodzenie osiąga pewną określoną krytyczną wartość. Ten rodzaj zniszczenia znany jest pod nazwą zniszczenia zmęczeniowego (Rys. 6). W ocenie niezawodności konstrukcji w oparciu o pierwszy mechanizm zniszczenia istotne jest określenie czasu T, w którym reakcja $Y(t, \gamma)$ osiągnie pewien ustalony, krytyczny poziom po raz pierwszy. Oczywiście, czas T jest wielkością losową. Podstawowe zagadnienie analizy uszkodzeń katastroficznych można sformułować następująco: znając własności statystyczne reakcji konstrukcji $Y(t, \gamma)$ należy wyznaczyć informację o czasie pierwszego przejścia T. Problemy związane z wyznaczeniem czasu pierwszego wyjścia realizacji procesu z rozważanego obszaru (lub przedziału) były rozważane w matematycznej teorii procesów stochastycznych. Efektywne rozwiązania mogą być jednak otrzymane tylko dla pewnych specjalnych klas procesów; na przykład — dla tzw. dyfuzyjnych procesów Markowa,



Rys. 9. Ilustracja uszkodzenia katastroficznego; przekroczenie przez reakcję (przemieszczenie, naprężenie itp.) stanu niebezpiecznego.



Rys. 10. Ilustracja nagromadzenia się uszkodzeń zmęczeniowych; R_f — tzw. granica wytrzymałości zmęczeniowej.



Rys. 11. Krzywa (we współrzędnych logarytmicznych prosta) S—N.

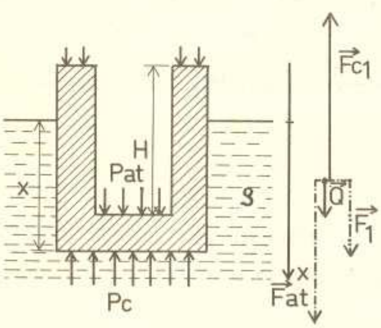
tj. procesów, w których ,,przyszłość" zależy tylko od stanu obecnego, a nie zależy od ,,przeszłości". Procesy takie są spokrewnione z procesem opisującym zjawisko ruchów Browna znane każdemu z fizyki; mówiąc dokładniej, dyfuzyjne procesy Markowa można modelować za pomocą ruchu brownowskiego. To, kiedy drgania stochastyczne realnych układów mogą być charakteryzowane przez dyfuzyjny proces Markowa stanowi problem sam w sobie. Dyfuzyjny charakter reakcji układu zależy przede wszystkim od wymuszenia. Jeżeli przypadkowe wymuszenie spełnia pewne warunki (np. gdy jest to proces stacjonarny o stałej gęstości widmowej, co oznacza, że między wartościami procesu w różnych chwilach brak jest korelacji), to reakcja układu może być opisana przez dyfuzyjny proces Markowa i wtedy można określić tzw. czas życia konstrukcji (jak pisaliśmy wyżej, jest to także zmienna losowa). W sytuacjach, gdy reakcja nie może być opisana przez dyfuzyjny proces Markowa, korzysta się z pewnych rozwiązań przybliżonych oraz oszacowań prawdopodobieństwa pierwszego przejścia. Szczególnie prosty rezultat otrzymuje się, jeżeli założy się, że proces $Y(t, \gamma)$ jako obiekt matematyczny jest taki, że przekracza on rozważany poziom wystarczająco rzadko, przy czym owe przekroczenia są zdarzeniami niezależnymi. Wtedy liczba chwil losowych w przedziale czasu $(0, t]$, w których następują przekroczenia poziomu jest scharakteryzowana przez tzw. jednorodny proces Poissona. Własności procesu Poissona są dość dobrze zbadane i, nawiasem mówiąc, stanowi on dobry model szeregu różnych zjawisk losowych; na przykład opisuje on proces zgłoszeń do stacji telefonicznej. Jeśli więc korzysta się z procesu Poissona jako modelu liczby przekroczeń rozważanego poziomu a, to prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu $(0, t]$ nie nastąpi żadne przekroczenie tego poziomu jest równe $e^{-\lambda t}$, zaś prawdopodobieństwo uszkodzenia katastroficznego w przedziale $(0, t]$ jest $1-e^{-\lambda t}$. Parametr λ oznacza intensywność procesu Poissona; w naszym przypadku jest on równy średniej liczbie przewyższeń poziomu a przez proces $Y(t, \gamma)$ w jednostce czasu ($e \approx 2{,}718$). Niestety, założenie, że przewyższenia poziomu a przez proces $Y(t, \gamma)$ są zdarzeniami niezależnymi, jest bardzo ograniczające. Toteż wielu badaczy poszukiwało innych metod charakteryzowania czasu uszkodzenia katastroficznego. W szczególności znalezione zostały różne oszacowania prawdopodobieństwa zniszczenia katastroficznego. Zniszczenie konstrukcji pod wpływem drgań stochastycznych przyjmuje najczęściej formę zniszczenia zmęczeniowego powstającego na skutek długotrwałego oddziaływania naprężenia o charakterze pulsującym (głośna niegdyś katastrofa mostu w Szwecji nastąpiła, jak zgodnie orzekli eksperci, właśnie na skutek zmęczenia). Fizyczne zjawiska leżące u podstaw zniszczenia zmęczeniowego są bardzo złożone, a ich natura nie jest jeszcze w pełni zbadana. W chwili obecnej podstawowe informacje o tym rodzaju zniszczenia czerpane są z badań eksperymentalnych przeprowadzanych w warunkach deterministycznych obciążeń cyklicznych. W takim przypadku istnieje relacja między amplitudą naprężenia i liczbą cykli powodujących zniszczenie; jest to tzw. krzywa S—N (lub krzywa Wohlera) określona zależnością: $NS^b = c$, gdzie S jest amplitudą naprężenia, N jest niszczącą liczbą cykli, zaś b i c są stałymi dodatnimi charakteryzującymi materiał. Jeżeli amplituda reakcji (naprężenia) nie jest stała, lecz zmienia się w czasie, to należy wprowadzić dodatkowe założenia dotyczące akumulowania się uszkodzeń spowodowanych różnymi amplitudami. Najlepiej znaną i ze względu na swoją prostotę ogólnie przyjmowaną jest hipoteza Palmgrena-Minera postulująca, że jeżeli zniszczenie pod wpływem naprężeń o danej amplitudzie występuje po N cyklach, to uszkodzenie akumuluje się w sposób jednorodny w każdym kolejnym cyklu, tak że podczas jednego cyklu występuje $1/N$ całkowitego zniszczenia. Zniszczenie spowodowane działaniem n_i cykli naprężenia o amplitudzie S_i jest równe: $\Delta_i = n_i/N_i$, $n_i \leqslant N_i$, gdzie N_i jest niszczącą liczbą cykli przy amplitudzie naprężenia S_i. Całkowite zniszczenie jest równe $D = \sum_i \Delta_i$. Element doznaje zniszczenia zmęczeniowego, jeżeli $D \geqslant 1$. Warto zauważyć, że kryterium Palmgrena-Minera nie uwzględnia wpływu kolejności występowania naprężeń na wielkość akumulowanego zniszczenia. Jest to jeden z jego niedostatków, gdyż eksperymenty wykazują, iż kolejność występowania różnych poziomów naprężenia jest istotna.

Kryterium Palmgrena-Minera zostało zaadaptowane do przypadku obciążeń stochastycznych przez zamianę liczby cykli n_i liczbą maksimów stochastycznego procesu naprężenia na poziomie S_i. Oczywiście, jeżeli naprężenie jest deterministyczne i cykliczne, to liczba maksimów jest równa liczbie cykli; jeżeli proces naprężenia jest stacjonarnym procesem stochastycznym, którego widmo energetyczne jest skupione w wąskim zakresie częstości (proces o wąskim widmie), to liczba maksimów równa się liczbie przecięć poziomu zerowego. W takiej sytuacji, jeśli dodatkowo rozkłady prawdopodobieństwa procesu naprężenia są gaussowskie, owe ,,ustochastycznione" kryterium Palmgrena-Minera daje interesujące i użyteczne rezultaty. Okazuje się, że otrzymana w ten sposób wartość średnia nagromadzonego zniszczenia zmęczeniowego jest proporcjonalna do średniej liczby przecięć przez proces naprężenia poziomu zerowego oraz zależy w sposób nieliniowy — różny dla różnych materiałów — od średniego kwadratu naprężenia. Należy jednak podkreślić, że kryterium Palmgrena-Minera (oraz inne podobne hipotezy) jest jedynie inżynierską procedurą szacowania nagromadzających się uszkodzeń, bardziej lub mniej słuszną w zależności od konkretnej sytuacji. Jako dość prosta hipoteza nie stanowi ono, i nie może stanowić, w żadnej mierze wyjaśnienia złożonego i w istocie swej stochastycznego mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego.

W ostatnim czasie podjęte zostały próby (również przez autora niniejszego artykułu) metodologicznie bardziej zadowalającego opisu akumulacji zniszczenia zmęczeniowego. Mówiąc ogólnie, oparte są one na traktowaniu elementu konstrukcji (czy próbki materiału), w którym zachodzi niszczenie zmęczeniowe (np. na skutek obciążeń przypadkowych) jako pewnego układu, którego stany są opisane przez proces stochastyczny. Owe zmęczeniowe stany elementu konstrukcji mogą być interpretowane i mierzone w różny sposób. Mogą one być, na przykład, wyrażane poprzez długość szczelin, rys czy innych defektów jakie rozwijają się w badanym elemencie. Zostało stwierdzone, że zniszczenie zmęczeniowe następuje głównie wskutek powstawania i wzrostu szczelin w materiale. Eksperymenty pokazują jednak, że mimo iż w próbce znajduje się duża liczba szczelin (różnej wielkości), to zawsze można wyróżnić szczelinę dominującą, która jest przede wszystkim odpowiedzialna za ostateczne zniszczenie. Tak więc długość dominującej szczeliny (lub pewna funkcja jej długości) może być przyjęta jako miara zniszczenia zmęczeniowego. Wzrost długości szczelin w ogóle, a dominującej szczeliny w szczególności, zachodzi jednak w sposób bardzo nieregularny; najczęściej — jak wskazują eksperymenty — w sposób skokowy w losowych chwilach czasu. Wydaje się, że właściwa charakteryzacja tego procesu stochastycznego wykorzystująca istniejące rezultaty eksperymentalne dotyczące zmęczenia materiałów może w sposób istotny wzbogacić naszą wiedzę o tym ważnym zjawisku. To, na ile takie stochastyczne modele akumulacji zniszczenia zmęczeniowego będą użyteczne, zależy od ich eksperymentalnej weryfikacji. Weryfikacja taka wymaga jednak zaplanowania i rozwinięcia metodologicznie nowych eksperymentów.

Zakończenie

Przedstawione w tym artykule zagadnienia stanowią istotny składnik współczesnej mechaniki. Warto jednak podkreślić, że ważność badań nad drganiami stochastycznymi, ich skutkami, a także nad zmniejszaniem ich negatywnego wpływu na człowieka, otoczenie i konstrukcje, ma nie tylko czysto utylitarne znaczenie. Analiza drgań stochastycznych i stochastyczne problemy trwałości konstrukcji są częścią metodologii opartej na ujmowaniu zjawisk w terminach zdarzeń i prawdopodobieństw. Metodologia ta okazała się niezwykle cenna w badaniu i wyjaśnianiu szeregu zjawisk fizyki, do mechaniki zaś weszła stosunkowo niedawno na skutek potrzeb najbardziej nowoczesnych gałęzi techniki, takich jak astronautyka i aerotechnika; następnie jej ważność została zaakceptowana przez takie tradycyjne dziedziny jak inżynieria lądowa i wodna, technika pojazdów i inne. Dzisiaj ten sposób podejścia do wielu zjawisk mechaniki przynosi istotne wzbogacenie jej aparatu badawczego, a także dostarcza nowych informacji o zachowaniu się konstrukcji i materiałów. Toteż w wielu ośrodkach naukowych w świecie stochastyczne podejście do interpretacji i badania zjawisk mechanicznych zajmuje coraz ważniejsze miejsce w programach badawczych. Również w Polsce badania w tym kierunku są istotnie zaawansowane. W naszym kraju wynikają one jednak bardziej z potrzeby uczestnictwa w rozwoju szeroko pojętej kultury niż z autentycznych zapotrzebowań praktyki inżynierskiej.



Rozwiązanie zadania F 103.

Przy dostatecznie powolnym zanurzaniu szklanki, wypadkowa sił działających na nią wynosi zero. Rysunek obrazuje sytuację przy zanurzeniu wynoszącym x. Przyjęto oznaczenia: S — powierzchnia przekroju zewnętrznego, s — wewnętrznego, F_{at} — wypadkowe parcie atmosfery, F_g — wypadkowe parcie powietrza zawartego w szklance, F_c — wypadkowe parcie cieczy, Q — siła ciężkości szklanki, F — siła przykładana przez zanurzającego. Indeksy 1 i 2 dotyczą odpowiednich przypadków pokazanych na rysunku. Z warunków równowagi zapisanych dla obu przypadków mamy

(1) $$F_1+Q+F_{at}+F_{c_1} = 0,$$

(2) $$F_2+Q+F_{at}+F_{c_2}+F_g = 0,$$

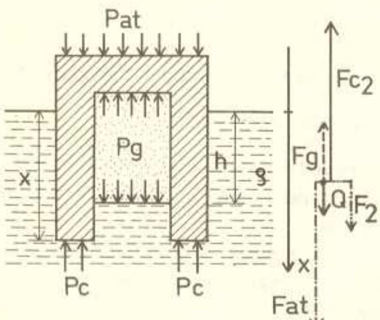
(1)—(2) $$F_1-F_2 = F_{c_1}-F_{c_2}-F_g.$$

Po zrzutowaniu na oś współrzędnych i podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy

$$F_{1x}-F_{2x} = S(P_{at}+\varrho gx)-(S-s)(P_{at}+\varrho gx)-S(P_{at}+\varrho gh).$$

Proste przekształcenia algebraiczne dają ostatecznie $F_{1x}-F_{2x} = \varrho gs(x-h)$.

Z zależności tych wynika, iż siła przykładana do szklanki zanurzonej dnem ku dołowi musi być większa, zatem większa jest w tym przypadku praca wykonana przez zanurzającego. Ilościowe znalezienie różnicy tych prac wymaga dodatkowych założeń natury termodynamicznej. Wtedy możliwe jest uzyskanie jawnej postaci zależności $h = f(x)$ a następnie obliczenie całki $W_1-W_2 = \int_0^x F_{1x}\,dx-\int_0^x F_{2x}\,dx = \int_0^x (F_{1x}-F_{2x})\,dx = \varrho gs\int_0^x (x-h)\,dx.$



Najbardziej naturalne jest założenie o równości temperatur powietrza, wody i szklanki, a także o izotermiczności procesu sprężania powietrza zawartego w szklance. Z prawa Boyle'a — Mariotte'a zapisanego dla stanów przed i po zanurzeniu wynika: $P_{at}H = (P_{at}+\varrho gh)[H-(x-h)]$.

Otrzymane równanie, kwadratowe względem h, zniechęca do dalszych rachunków. Dają się one co prawda uprościć, gdy skorzysta się z faktu niewielkich zmian ciśnienia, lecz nie wnoszą niczego istotnego do rozwiązania i dlatego pominiemy je.

Do identycznego wyniku można dojść rozwiązując zadanie na gruncie zasady zachowania energii. Należy jednak pamiętać, że trzeba skorzystać z jej rozszerzonej (o zjawiska cieplne) wersji. Polecamy to Czytelnikom jako pouczające ćwiczenie.