O iteracji przejść granicznych

Dr Zbigniew SAWOŃ

Wprowadzenie

W Analizie Matematycznej wiele pojęć wprowadza się przy użyciu przejść granicznych. Tak postępujemy określając np. ciągłość funkcji w punkcie, różniczkowalność funkcji w punkcie, całkowalność w sensie Riemanna itd. Nieraz przy praktycznych zastosowaniach lub w trakcie przeprowadzania dowodów twierdzeń pojawia się konieczność zastosowania przejścia granicznego do ciągu elementów, przy określeniu których zastosowano już w sposób mniej lub bardziej zakamuflowany przejście graniczne. W ten sposób mamy do czynienia z iteracyjnym procesem granicznym, w którym kolejność wykonywania tych przejść granicznych jest z góry określona. Wykonanie ich w innej kolejności może dać po prostu inny wynik.
Zachodzi więc konieczność zbadania, kiedy wynik takiego iteracyjnego procesu granicznego zależy istotnie od kolejności wykonywania tych przejść i jeżeli zależy, to rzeczą niezwykle ważną jest znalezienie warunków koniecznych, dostatecznych lub najlepiej jednocześnie koniecznych i dostatecznych, gwarantujących niezależność wyniku od kolejności wykonania przejść granicznych. W ten sposób powstały znane z Analizy twierdzenia, np. *twierdzenie o różniczkowaniu wyraz za wyrazem ciągu funkcyjnego*, lub *twierdzenie o przejściu z granicą pod znak całki*.

Twierdzenie o różniczkowaniu „wyraz za wyrazem" szeregu potęgowego: Jeżeli funkcje f_n są różniczkowalne w pewnym przedziale (a, b) a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest w tym przedziale zbieżny jednostajnie, to jego suma $f_0(x)$ jest także funkcją różniczkowalną w tym przedziale i

$$f_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki: Jeżeli funkcje f_n są całkowalne na pewnym przedziale (a, b) i ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie, to funkcja graniczna f_0 jest też całkowalna i

$$\int_a^b f_0(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

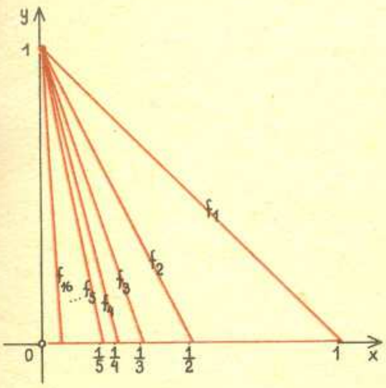
Rozpatrzmy dwa przykłady.

Przykład 1. Na przedziale domkniętym $[0, 1]$ określamy funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots$ następująco

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{gdy } 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Typowy wykres funkcji f_n widzimy na rysunku obok. Dla każdego $x \in [0, 1]$ ciąg liczb $(f_n(x))$ jest zbieżny do liczby $f_0(x)$, gdzie

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



Niech teraz ciag liczb x_k z przedziału $(0, 1]$ będzie zbieżny do zera. Mamy wówczas

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{k\to\infty} f_0(x_k) = 0, \quad \text{natomiast}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1.$$

i widzimy, że istotnie wynik zależy od kolejności wykonywania przejść granicznych. Analizując dokładniej powyższy przykład stwierdzimy z łatwością, że w zasadzie wykazaliśmy tylko nieciągłość funkcji f_0 w punkcie $x = 0$.

Przykład 2. Problem, jaki sobie stawiamy, to wyliczenie granicy

$$a = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+k}.$$

Oczywiście najprościej byłoby napisać

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

ale czy wolno nam było zamienić kolejność przejść granicznych? W tym przypadku tak, gdyż dla każdego naturalnego k mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+k} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n+k},$$

a szereg po prawej stronie tej równości jest k-tą resztą zbieżnego szeregu naprzemiennego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; a więc granica tych sum, przy $k \to \infty$, jest równa zeru.

I. Problem poruszony w przykładzie 1, dotyczący możliwości zamiany kolejności przejść granicznych jest szczególnym przypadkiem szerszego zagadnienia, które można opisać następująco:

Niech S będzie przestrzenią metryczną i niech $s_0 \in S$. Dany jest ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych określonych na S taki, że dla każdego $s \in S$ ciąg liczb $f_n(s)$ jest zbieżny do pewnej liczby $f_0(s)$. Czy i kiedy funkcja f_0 jest ciągła w punkcie s_0? Z ewentualnej pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} (f_n(x_k)) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(x_k),$$

bo obydwie „podwójne granice" są równe $f_0(s_0)$.

W Analizie matematycznej często łatwiejsze do zbadania niż „lokalne" są problemy globalne, mówiące coś o własnościach funkcji na całym zbiorze określoności. Tak samo i my podamy pewne warunki ciągłości funkcji f_0 w każdym punkcie zbioru przestrzeni metrycznej S. Jak widzieliśmy w przykładzie 1 „punktowa" zbieżność ciągu funkcji ciągłych wcale nie gwarantuje, że funkcja graniczna jest ciągła. Proponujemy Czytelnikowi rozważyć także przypadek ciągu funkcji $f_n(x)$ na przedziale $[0, 1]$ określonych wzorem $f_n(x) = x^n$.

Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego. Jeżeli dla każdego punktu x obszaru określoności funkcji $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ mamy

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

to mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest punktowo zbieżny do swojej granicy f_0. Symbolicznie

$$f_n \to f \Leftrightarrow \bigwedge_{x} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

Podaną w tekście definicję jednostajnej zbieżności można zaś symbolicznie zapisać tak

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{x} \bigwedge_{n>N} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

(zwróćmy uwagę na kolejność kwantyfikatorów).

Przypuśćmy teraz, że ciąg f_n funkcji na S jest „punktowo" zbieżny do funkcji f_0 i że dla każdego naturalnego n liczba

$$\delta_n = \sup_{s\in S} |f_n(s)-f_0(s)|$$

jest skończona; ma to miejsce np. w przypadku, gdy funkcja f_0 jest ciągła. Może się zdarzyć, że

$$\delta_n \to 0.$$

Mówimy wówczas, że ciąg funkcji f_n jest *jednostajnie zbieżny* na S do f_0 i zapisujemy to symbolicznie tak:

$$f_n \rightrightarrows f_0 \quad \text{na } S.$$

Z naszych definicji wynika, że

Jeżeli f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są funkcjami na zwartej przestrzeni S i $f_n \rightrightarrows f_0$ na S, to f_0 jest funkcją ciągłą. Krócej: *granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.* Wracając do przykładu 1 z łatwością obliczymy, że tam $\delta_n = 1$.

Przestrzeń metryczną nazywamy *zwartą*, jeżeli każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny. Podprzestrzenie zwarte przestrzeni euklidesowej to zbiory domknięte i ograniczone. W szczególności jest tak dla podzbiorów prostej liczbowej. Przestrzenie *lokalnie zwarte* to przestrzenie metryczne, w których każdy punkt ma otoczenie, którego domknięcie jest zwarte. Przestrzenie euklidesowe i wszystkie ich podprzestrzenie (w szczególności prosta liczbowa i wszystkie jej podzbiory) są lokalnie zwarte.

Przykład 3. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \qquad x \in [0, 1], \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

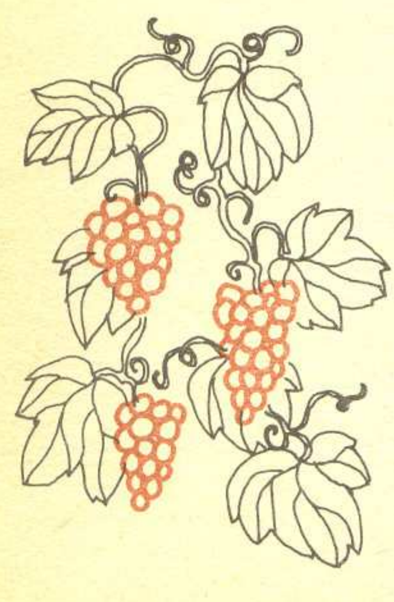
Oczywiście jest on zbieżny punktowo do funkcji zerowej, a więc ciągłej. Ale $\delta_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n)| = 1/\sqrt[n]{2} \to 1$, tj. ciąg nasz *nie jest* do swojej granicy zbieżny *jednostajnie.*

Widzimy zatem, że zbieżność jednostajna jest warunkiem *dostatecznym* ciągłości funkcji granicznej, ale nie warunkiem *koniecznym.* Pewne warunki konieczne i dostateczne sformułował Àrzelá i są związane z tzw. zbieżnością quasijednostajną:

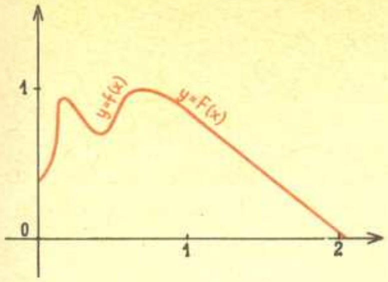
Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych określonych na S jest quasijednostajnie zbieżny do swojej granicy punktowej f_0 na S, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego naturalnego n_0 istnieje skończona liczba wskaźników $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ większych od n_0 i takich, że dla każdego $s \in S$ zachodzi

$$\min_{1\leq i\leq k} |f_{n_i}(s)-f_0(s)| < \varepsilon.$$

Zapisujemy to symbolicznie tak: $f_n \underset{q}{\rightrightarrows} f$ na S. Oczywiście ciąg zbieżny jednostajnie jest zbieżny quasijednostajnie (dlaczego?) Twierdzenie Arzeli mówi, że jeżeli $f_n(s) \to f_0(s)$ dla każdego punktu s zwartej przestrzeni metrycznej S i jeżeli f_n są funkcjami ciągłymi, to f_0 jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \underset{q}{\rightrightarrows} f_0$ na S. Istotną rzeczą w twierdzeniu tym jest założenie zwartości przestrzeni S. Twierdzenia tego typu dla przestrzeni metrycznych innych niż zwarte i lokalnie zwarte nie są autorowi znane.



II. Granica punktowa ciągu funkcji ciągłych określonych na S, jak już wiemy, nie musi być funkcją ciągłą. Powstaje w związku z tym pytanie: Jaką funkcję określoną na S można przedstawić jako granicę punktową ciągu punktowo zbieżnego funkcji ciągłych? Inaczej: jak scharakteryzować „punktowe" granice ciągów funkcji ciągłych? Dokładne zbadanie tego zagadnienia wymaga wprowadzenia pewnej klasyfikacji funkcji określonych na przestrzeni metrycznej S.



Dzielimy mianowicie funkcje na klasy Baire'a w następujący sposób:
i) do zerowej klasy Baire'a zaliczamy funkcje ciągłe,
ii) do k-tej klasy Baire'a ($k \geqslant 1$) na S zaliczamy granice punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy $k-1$ (nie należące do l-tej klasy dla $l < k$).

Przykład 4. Funkcja f_0 z przykładu 1 jest funkcją pierwszej klasy Baire'a na $[0, 1]$.

Przykład 5. Wykażemy, że pochodna różniczkowalnej funkcji f: $[0, 1] \to R$ jest funkcją co najwyżej pierwszej klasy Baire'a na tym przedziale. Rozszerzmy najpierw funkcję f do funkcji F różniczkowalnej na przedziale $[0, 2]$ np. wzorem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in [0, 1] \\ f(1) + (x-1)f'(x) & \text{dla} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

(p. rysunek obok). Oczywiście

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(1) & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Jeżeli przyjmiemy teraz dla $x \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_n(x) = n(F(x+1/n) - F(x))$$

to łatwo wykażemy, że funkcje f_n są ciągłe i $f_n(x) \to f'(x)$ dla każdego $x \in [0, 1]$, tzn. ciąg funkcji f_n jest punktowo zbieżny do granicy f'.

Przykład 6. Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych zawartych między 0 a 1

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [0, 1] \text{ jest liczbą wymierną} \\ 0 & \text{gdy } x \in [0, 1] \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest — jak łatwo sprawdzić — granicą następującego punktowo zbieżnego ciągu:

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos 2\pi n!\, x)^{2k}$$

i jest wobec tego funkcją co najwyżej drugiej klasy Baire'a.

Ważną własność funkcji pierwszej klasy Baire'a opisuje następujące twierdzenie:
Każda funkcja pierwszej klasy Baire'a określona na zwartej przestrzeni metrycznej S ma przynajmniej jeden punkt ciągłości. Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że funkcja z poprzedniego przykładu nie jest pierwszej klasy.
Są twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne przynależności danej funkcji do określonej klasy Baire'a. W sformułowaniach tych twierdzeń występują pojęcia związane ze strukturą topologiczną przestrzeni S. Przytoczenie tych twierdzeń wykraczałoby poza ramy tego artykułu.

Na zakończenie autor chciałby podać kilka uwag o „bogactwie" klas Baire'a. I one są w pewnym sensie związane ze strukturą topologiczną przestrzeni zwartej S.

1) Jeżeli S składa się ze skończonej liczby punktów, to oczywiście każda funkcja na S jest ciągła i odwrotnie: jeżeli S jest taką zwartą przestrzenią metryczną, że każda funkcja określona na S jest na S ciągła, to przestrzeń S ma tylko skończoną liczbę punktów. Na takiej przestrzeni wszystkie funkcje są zerowej klasy Baire'a.

2) Niech S składa się z liczby 0 i liczb postaci $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Funkcja określona wzorem $f(1/n) = a_n$, $f(0) = a_0$ jest ciągła na S wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Jeżeli wybierzemy $a_0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to otrzymamy funkcję nieciągłą. Ale gdy

$$f_k(1/n) = \begin{cases} a_n & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k \\ a_0 & \text{dla } n > k \end{cases}$$

oraz $f_k(0) = a_0$
to f_k są już ciągłe na S oraz zbieżne punktowo do f_0. Widzimy zatem, że na takiej przestrzeni S każda funkcja jest co najwyżej pierwszej klasy Baire'a. Można wykazać, że podobnie jest dla dowolnych przeliczalnych zwartych przestrzeni metrycznych. Autorowi nie wiadomo, czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne: Jeżeli S jest taką przestrzenią metryczną zwartą, że każda funkcja o wartościach rzeczywistych na S jest albo ciągła albo pierwszej klasy Baire'a, to S jest zbiorem przeliczalnym.

3) Gdy S jest odcinkiem $[0, 1]$, to istnieją funkcje dowolnie wysokich klas Baire'a na S a także funkcje, które nie są żadnej klasy Baire'a.