Fale uderzeniowe i bałwany

Doc. dr Antoni KUSZELL

Ruch falowy to koncepcja fizyczna obejmująca niezwykle szeroki krąg zjawisk. Każdemu znane jest zachowanie się fal na wodzie, rozchodzenie się światła czy dźwięku. W artykule tym zajmiemy się pewnymi, mniej znanymi zjawiskami związanymi z ruchem falowym. Przykładem takiego zjawiska jest powstawanie i rozwój fali uderzeniowej.

Jedną z podstawowych cech ruchu falowego jest fakt rozchodzenia się fal w określonych kierunkach zwanych promieniami. Promień fali jest to krzywa prostopadła do czoła fali. Równania opisujące ruch falowy nazywamy równaniami typu hiperbolicznego, zaś promienie fal — charakterystykami tych równań.

Dla pełniejszego zrozumienia wprowadzonych pojęć, a także dla zilustrowania niektórych zagadnień związanych z ruchem falowym rozważmy najprostsze równanie hiperboliczne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (1$$

gdzie u jest amplitudą fali, zaś v jest prędkością rozchodzenia się sygnału. Dla prostoty ograniczyliśmy się do ruchu jednowymiarowego.

Przyjmijmy poza tym, że w chwili $t = 0$ profil fali ma postać

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

W ośrodku przestrzennie jednorodnym w warunkach stacjonarnych oraz dla fal o amplitudzie tak małej, że można zaniedbać ich wpływ na własności ośrodka, prędkość v jest stała w czasie i przestrzeni. Łatwo się wtedy przekonać przez podstawienie do równania (1), że funkcja

$$u(x, t) = u_0(x - vt)$$

jest rozwiązaniem naszego problemu. Na prostych

$$x = x_0 + vt \qquad (2$$

rozwiązanie to przyjmuje stałą wartość. Mamy bowiem

$$u(x_0 + vt, t) = u_0(x_0 + vt - vt) = u_0(x_0) = \text{const}.$$

Tak więc proste (2) są charakterystykami równania (1), opisującego w tym przypadku jedynie równoległe przesunięcie profilu w prawo o odcinek $v \cdot t$ bez zmiany jego kształtu (rys. 2). Dzieje się tak dlatego, że wszystkie charakterystyki są prostymi równoległymi (rys. 1).

Wiele procesów fizycznych opisuje równanie falowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

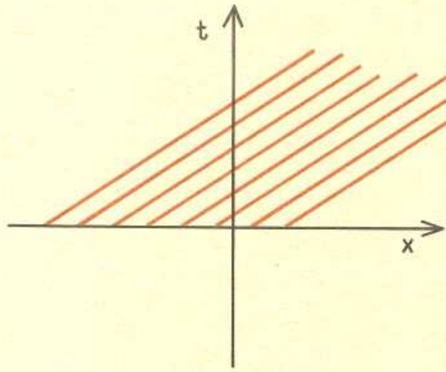
którego ogólne rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = u_0(x - vt) + u_1(x + vt).$$

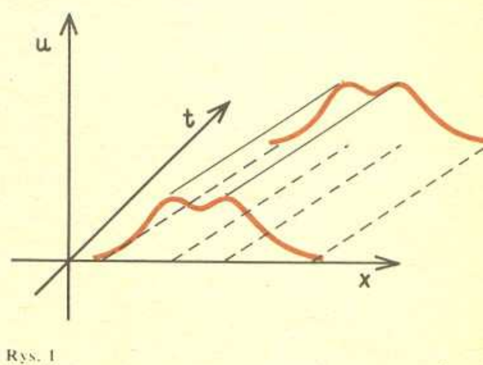
Jest to suma dwóch fal, z których jedna przesuwa się w prawo, a druga w lewo. Dla uproszczenia w artykule rozważana jest tylko jedna z tych fal.

Przykładem fal rozchodzących się ze stałą prędkością są fale elektromagnetyczne w próżni. W czterowymiarowej czasoprzestrzeni fale takie emitowane przez źródło punktowe rozchodzą się na stożku opisanym równaniem

$$\vec{r}^2 - c^2t^2 = (r + ct)(r - ct) = 0.$$



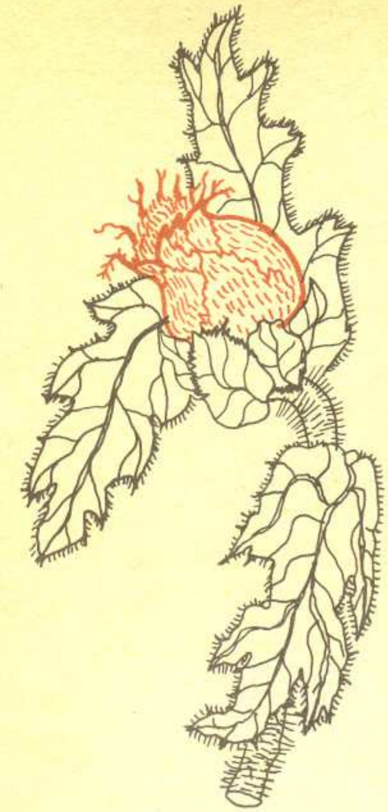
Rys. 1



Rys. 2

Na ogół jednak prędkość rozchodzenia się sygnału jest wielkością zależną od współrzędnych i czasu, co zmusza nas do odejścia od opisanej idealizacji. Zmienność tej prędkości może być powodowana przez wiele czynników. Zależność od współrzędnych jest na ogół spowodowana przestrzenną niejednorodnością ośrodka, zaś zależność od czasu niestacjonarnymi warunkami, w jakich się ten ośrodek znajduje; np. może być ogrzewany.

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy fala niesie tak dużą energię, że może zmieniać własności ośrodka, w którym się rozchodzi. Mamy wtedy do czynienia z tzw. propagacją nieliniową, co oznacza, że odpowiedź ośrodka nie jest już proporcjonalna do wielkości zaburzenia. Dla fali dźwiękowej zależność prędkości od amplitudy pojawia się w następujący sposób. Ciało poruszające się w powietrzu musi usuwać powietrze ze swej drogi, co powoduje powstanie lokalnego zaburzenia ciśnienia. Ciśnienie z tyłu czoła fali jest większe niż w obszarze, do którego fala jeszcze nie dotarła. Przejście fali wywołuje więc adiabatyczne sprężenie powietrza i wzrost jego temperatury. Ponieważ prędkość dźwięku rośnie z temperaturą, w obszarze za skokiem ciśnienia jej wartość będzie większa. Okazuje się, że zmiana ciśnienia o 1 Atm. powoduje wzrost prędkości sygnału o około 20%.



W przypadku fali świetlnej zmiana własności optycznych ośrodka następuje dopiero wtedy, gdy natężenie jej pola elektrycznego jest porównywalne z wewnętrznym polem elektrycznym ośrodka. Pole wewnętrzne jest polem działającym na elektrony. W atomach jest ono rzędu 10^{11} V/m a w półprzewodnikach około 10^{9} V/m. Obecnie konstruowane lasery pozwalają na otrzymanie fal świetlnych, w których natężenie pola jest rzędu 10^{8} — 10^{10} V/m.
Tak więc w najogólniejszym przypadku prędkość rozchodzenia się sygnału zależy od współrzędnych, czasu i amplitudy

$$v = v(x, t, u).$$

Okazuje się jednak, że nawet w tak ogólnej sytuacji możemy skonstruować rozwiązanie posługując się metodą charakterystyk.
W płaszczyźnie (x, t) charakterystyka jest krzywą

$$x = X(t),$$

wzdłuż której amplituda ma stałą wartość czyli

$$\frac{\mathrm{d}u(X(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Porównanie z (1) daje warunek, który muszą spełniać charakterystyki

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = v(X, t, u), \quad X(0) = x_0. \tag{3}$$

Oczywiście w tym przypadku charakterystyki nie będą już rodziną prostych równoległych, jak to miało miejsce przy stałej prędkości v. Dla przykładu rozważmy rozchodzenie się fal o małym natężeniu w niejednorodnym ośrodku stacjonarnym. Prędkość grupowa jest wtedy funkcją tylko współrzędnych i równanie (3) można rozwiązać rozdzielając zmienne

$$t = \int_{x_0}^{X} \frac{\mathrm{d}x'}{v(x')}.$$

Rozwiązanie to jest rodziną krzywych na płaszczyźnie (x, t). W przypadku jednowymiarowym krzywe te nigdy się nie przecinają. W wielu wymiarach punkty przecięcia mogą się jednak pojawić. Rozważmy taki punkt przecięcia $(\vec{X}, T)$ charakterystyk wychodzących z punktów $\vec{x}_0$ i $\vec{x}_1$. Rozwiązanie w punkcie $(\vec{X}, T)$ jest więc funkcją wieloznaczną, bo amplituda fali powinna być w tym punkcie równa jednocześnie $u_0(\vec{x}_0)$ i $u_0(\vec{x}_1)$. Wszystkie punkty przecięcia charakterystyk są jednoznacznie określone przez niejednorodność ośrodka. W problemach stacjonarnych mają one prostą interpretację fizyczną. Punkty izolowane w przestrzeni to ogniska, a krzywe i powierzchnie nazywane są powierzchniami kaustycznymi.

Więcej informacji o powierzchniach kaustycznych znajdzie Czytelnik w artykule Jakuba Tatarkiewicza „O Teorii Katastrof" w tym numerze „Delty".

Wracając do prostego przypadku jednowymiarowego ciekawe może być wyznaczenie rodziny charakterystyk dla dowolnej, przyjętej przez Czytelnika, zależności prędkości grupowej od położenia. Gorąco do takiego rachunku zachęcamy.
Drugim przykładem, który szczegółowo omówimy, jest przypadek fal o dużym natężeniu rozchodzących się w ośrodku jednorodnym i stacjonarnym. Prędkość rozchodzenia się fal zależy teraz od amplitudy fali w danym punkcie

$$v = v(u).$$

Ponieważ na krzywych charakterystycznych amplituda jest stała, rozwiązaniem równania

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = v(u)$$

jest rodzina prostych

$$X(t) = x_0 + v(u_0(x_0))t.$$

Kąt nachylenia charakterystyk jest wyznaczony przez wartość początkową amplitudy fali w punkcie x_0. Tak więc charakterystyki mogą się przecinać. Jednak sytuacja jest teraz krańcowo różna od omawianej poprzednio. Teraz położenie punktów przecięcia charakterystyk zależy od stanu początkowego fali a nie od własności ośrodka. Przecinanie się charakterystyk odpowiada tzw. katastrofie gradientowej. Zjawisko to polega na tym, że gdy prędkość sygnału za czołem fali jest większa niż przed nim, to z upływem czasu jej profil robi się coraz bardziej stromy (gradient amplitudy rośnie). Jeśli zaniedba się lepkość i przewodnictwo cieplne, prowadzi to w końcu do powstania nieciągłego frontu fali.
Wszelkie zaburzenia powstające za frontem fali doganiają go po pewnym czasie i przyczyniają się do jego wzrostu. Zilustrujemy ten mechanizm na przykładzie najprostszej zależności prędkości od amplitudy $v(u) = u$.
Charakterystyki mają wtedy postać

$$x = x_0 + u_0(x_0)t,$$

a rozwiązanie równania (1)

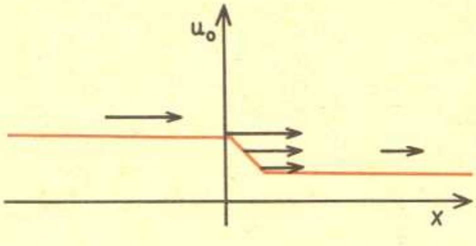
$$u(x, t) = u_0(x - u_0(x_0)t).$$

Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że na charakterystyce wartość amplitudy jest stała, a więc w szczególności równa wartości początkowej.

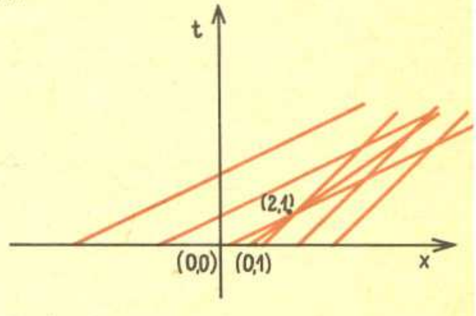
Rozważmy teraz zaburzenie początkowe w następującej postaci (rys. 3)

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x < 0 \\ 2-x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

W trójkącie o wierzchołkach (0, 0), (1, 0) oraz (2, 1), gdzie pierwsza współrzędna oznacza zmienną przestrzenną a druga czas, nachylona część fali jest z upływem czasu coraz bardziej stroma, aż w punkcie (2, 1) staje się pionowa (rys. 4).

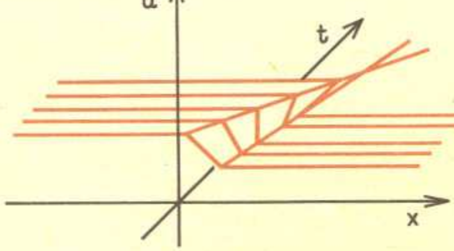


Rys. 3

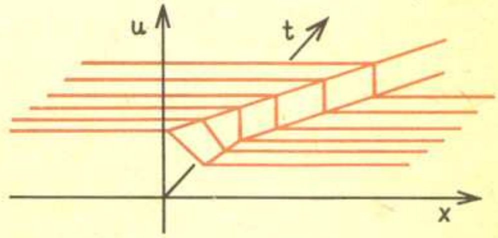


Rys. 4

Dalsza analiza wymaga określenia charakteru wielkości fizycznej opisywanej funkcją u. Jeśli u opisuje falę elektromagnetyczną, to przecięcie się promieni świetlnych nie prowadzi do żadnych trudności w interpretacji rozwiązania, bo sumują się wtedy energie fal. Równie prosty jest przypadek fal powierzchniowych na wodzie. Wielkość u może być wtedy interpretowana jako miara wzniesienia się powierzchni nad poziom średni, a proces „stromienia" opisuje znane zjawisko wyostrzania profilu biegnącej fali. Pojawienie się „podwójnej" wartości po przecięciu się charakterystyk opisuje natomiast załamywanie się fal czyli tworzenie się bałwanów (rys. 5).



Rys. 5



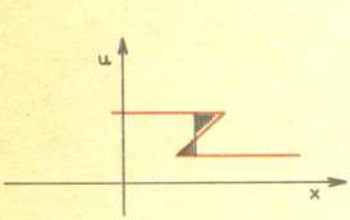
Rys. 6

Zupełnie inaczej przebiega interpretacja, gdy funkcja u jest np. gęstością ośrodka (fale dźwiękowe). Wtedy oczywiście niejednoznaczne rozwiązanie nie może mieć żadnej fizycznej interpretacji. W chwili, gdy fala zaczyna się załamywać, traci ono sens. Właściwie należałoby w tym przypadku wziąć pod uwagę lepkość i przewodnictwo cieplne — efekty, które stają się istotne, gdy fala jest bliska załamania. Okazuje się, że rozwiązania równań uwzględniających te efekty są już jednoznaczne. Znacznie łatwiejsze jest jednak nadanie sensu naszemu rozwiązaniu przez zastąpienie części wieloznacznej funkcją nieciągłą (rys. 6). Okazuje się, że nieciągłość należy umieścić w takim punkcie, żeby pola zakreskowanych na rys. 7 obszarów były równe. Wtedy tylko dla nowego rozwiązania spełnione jest równanie ciągłości (ilość materii jest stała). Otrzymany w ten sposób skok wartości amplitudy fali nosi nazwę fali uderzeniowej, zaś powierzchnia nieciągłości — frontu fali uderzeniowej. Fale uderzeniowe odgrywają olbrzymią rolę w fizyce zjawisk zachodzących z prędkościami przekraczającymi prędkości charakterystyczne ośrodka (np. prędkość dźwięku). Na przykład samolot przekraczający barierę dźwięku wywołuje silną falę uderzeniową. Podobnie pocisk poruszający się z prędkością ponaddźwiękową wywołuje falę uderzeniową, której front ma kształt stożka.

W artykule tym ograniczyliśmy się do rozważań dotyczących rozchodzenia się fali i możliwości jej opisu przy pomocy charakterystyk. Istnieją jednak także inne zjawiska, które istotnie zmieniają własności fal. Należą do nich z jednej strony zjawiska dysypatywne (dyfuzja, tarcie lepkie itp.), z drugiej zaś zjawiska typu dyspersji. Oba prowadzą do rozmycia frontu fali uderzeniowej, co powoduje, że w rzeczywistości nieciągłości się nie pojawiają. W wąskim obszarze frontu występuje tylnie gwałtowna zmiana amplitudy dobrze przybliżana przez nieciągłość.

Warto tutaj wspomnieć, że po uwzględnieniu dyspersji i członu nieliniowego jak np. w równaniu Kortewega-de Vriesa (Delta 4/1976) rozwiązanie może przyjmować pewien specyficzny kształt zwany solitonem zachowywany bez zmian w trakcie ewolucji.

Tak więc propagacja fal kryje w sobie wiele ciekawych zjawisk, z których część została już wyjaśniona, ale z pewnością wiele czeka jeszcze na odkrycie.



Rys. 7

Dyspersja fal to zależność prędkości fazowej od długości fali.