

## Test wcale nie dla uczniów

6. Łatwo obliczyć wartość nieskończonej sumy

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \dots$$

Oznaczając ją przez  $S$  mamy bowiem

$$S = 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots \right)$$

i widzimy, że wyrażenie w nawiasie też jest równe  $S$  — bo jest sumą odwrotności wszystkich potęg trójki. Mamy zatem równanie

$$S = 1 + \frac{1}{3} \cdot S,$$

skąd natychmiast wyliczymy, że  $S = \frac{3}{2}$ .

Obliczmy w ten sposób wartość nieskończonej sumy

$$\Sigma = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \dots$$

Mamy  $\Sigma = 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3\Sigma$ , skąd  $\Sigma = -\frac{1}{2}$  ... Zaraz, zaraz?

Suma potęg trójki ma być równa minus połówce?

Które z tych obliczeń jest poprawne? Pierwsze? Drugie? Żadne? Obydwa? Dlaczego?



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 271.** Rozwiązać równanie

$$(x_1 + x_2 \sqrt{7})^4 + (y_1 + y_2 \sqrt{7})^4 = 2 + \sqrt{7},$$

w zbiorze liczb wymiernych.

Rozwiązanie na str. 13

**M 272.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $[(2 + \sqrt{3})^n]$  jest nieparzysta. Symbol  $[x]$  oznacza największą z liczb całkowitych nie większych od  $x$ .

Rozwiązanie na str. 13

**M 273.** W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest zbiór  $A$  o tej własności, że żadna para

punktów tego zbioru nie jest odległa dokładnie o  $\frac{1}{100}$ . Wykazać, że  $S(A) < 0,341$ .

Symbol  $S(X)$  oznacza pole zbioru  $X$ .

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 99.** Gdy prędkość wypływu gazów z dysz rakiety jest mniejsza niż prędkość jej samej, wtedy gazy poruszają się w ślad za rakieta. Czy w takim przypadku prędkość rakiety może wzrastać?

Rozwiązanie na str. 13

**F 100.** Samoloty  $A$  i  $B$  lecą obok siebie z prędkością  $v$ . Następnie samolot  $A$  zwiększa dwukrotnie swoją prędkość. Dla obserwatora na ziemi energia kinetyczna samolotu  $A$  wzrosła o

$$\Delta K_1 = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} mv^2.$$

Dla pilota samolotu  $B$  odpowiedni przyrost energii samolotu  $A$  wynosi

$$\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Ilość spalanego w trakcie przyspieszania paliwa jest w obu układach odniesienia taka sama, zaś skutek zdecydowanie różny. Wyjaśnić paradoks.

Rozwiązanie na str. 13

