10. Doc. dr Lech Kubik przedstawił następujący przykład. 230 osób poddano leczeniu pewnym lekiem *A*. Istotna poprawa nastąpiła u 65 osób. Innym 160 osobom podano lek *B*, uzyskując poprawę u 60 pacjentów. Który lek jest lepszy: *A* czy *B*? No i co tu takiego? Wystarczy obliczyć procenty: 65:230 = 0,28, 60:160 = 0,38 i jasno widać, że jakkolwiek skuteczność obu leków pozostawia wiele do życzenia, to drugi jest wyraźnie lepszy — o 10%. I dobrze. Zainteresowano się jednak skutecznością leków *A* i *B* oddzielnie dla kobiet i mężczyzn. Oto odpowiednia statystyka

lek *A*	leczeni	poprawa	skuteczność leczenia
mężczyzn	210	50	0,24
kobiet	20	15	0,75
ogółem	230	65	0,28

lek *B*	leczeni	poprawa	skuteczność leczenia
mężczyzn	100	20	0,20 (mniejsza niż *A*)
kobiet	60	40	0,67 (mniejsza niż *A*)
ogółem	160	60	0,38 (większa niż w *A*)

Co widzimy? Choć zarówno dla kobiet jak i dla mężczyzn lek *A* jest lepszy to ogólnie jest gorszy. Kto to zrozumie? A może statystyka kłamie? Ale w którą stronę?

Wybór czy determinacja, czyli nie ufajmy intuicjom

Dr Andrzej PELC

Czego wymagamy przede wszystkim od systemu aksjomatów teorii matematycznej? Oczywiście, żeby nie był wewnętrznie sprzeczny! O tym jednak trudno się zwykle przekonać patrząc na same sformułowania pewników. Aby zmniejszyć ryzyko sprzeczności staramy się na ogół o to, by aksjomaty były „intuicyjnie prawdziwe". Mając więc — w wyniku długiej praktyki matematycznej — pewne wyczucie tego, czym są zbiory, próbujemy zapisać w aksjomatyce teorii mnogości istotne własności tych obiektów i ufamy, że zbudowany w ten sposób system jest niesprzeczny, opisuje bowiem zbiory takimi, jakie są „naprawdę". Innymi słowy, wierzymy w niesprzeczność własnych intuicji. Wiara ta powodowała wielokrotnie, że matematycy po pewnym czasie pracy z taką „intuicyjnie murowaną" aksjomatyką, stwierdzali z przerażeniem, że doszli do sprzeczności. Chodzi tu o tzw. antynomie teorii mnogości z najsłynniejszym paradoksem Russella na czele. Szczęśliwie zostały one wyeliminowane przez sprecyzowanie aksjomatów: czy jednak nie wyskoczą sprzeczności nowe? My zaś chcemy dziś zaproponować Czytelnikom test na intuicję matematyczną. Sprawdźmy, jak dalece czujemy, czym są zbiory.

Paradoks Russella. Rozważmy zbiór X złożony ze zbiorów, które nie są swoim własnym elementem. Czy $X \in X$? W wersji „popularnej": fryzjer w miasteczku goli tych wszystkich mężczyzn, którzy nie golą się sami. Czy goli on sam siebie?

Pierwszy aksjomat, który pragniemy poddać pod rozwagę to tak zwany aksjomat wyboru. Powiada on, że dla każdej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór *S* zwany *selektorem*, który zawiera dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem rozważanej rodziny.
Robiąc zakupy w sklepie ze słodyczami można przecież utworzyć selektor ze zbioru gatunków czekolady, kładąc do koszyka po jednej tabliczce z każdego rodzaju (*artykuł był pisany w 1979 r., red.*). Dla rodzin nieskończonych trudno podać taki handlowy przykład, ale... z pewnością jest tam podobnie, prawda?

Znakomicie, rozważmy więc inny, bardziej „rozrywkowy" aksjomat, tzw. aksjomat determinacji. Mówi on o grach...

Dwaj gracze: I i II wybierają kolejno liczby naturalne. Przed rozpoczęciem gry partnerzy ustalili pewien zbiór A nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych. Partia w grze G_A (zależnej od zbioru A) liczy nieskończenie wiele ruchów, a w jej wyniku powstaje ciąg liczb naturalnych. Jeżeli należy on do wyróżnionego zbioru ciągów A, wygrał gracz I, jeśli nie — wygrał II. Powiemy, że gracz I ma strategię zwycięską, jeśli istnieje funkcja f określona na skończonych ciągach liczb naturalnych o tej własności, że jeśli w każdym ruchu, w pozycji $a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n$ gracz I zagra $f(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$, to wygra niezależnie od dalszych ruchów partnera. Analogicznie określamy strategię zwycięską dla gracza II. Aksjomat determinacji mówi, że dla każdego zbioru A któryś z graczy ma strategię zwycięską w grze G_A. Czy to jest zgodne z intuicją? Pomyślmy: jeżeli mój partner nie ma pewnego sposobu, żeby ze mną wygrać (bo tym w istocie rzeczy jest strategia zwycięska) to ja, grając dobrze na pewno go pokonam, skoro przepisy gry nie dopuszczają remisów. A więc, chyba „prawdziwy" aksjomat...?

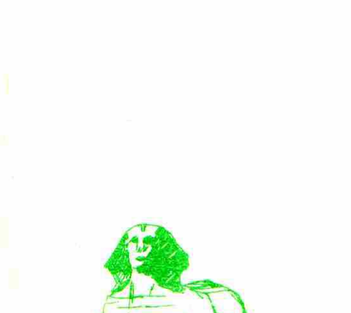
Dowód sprzeczności aksjomatu wyboru z aksjomatem determinacji można znaleźć np. w książce W. Guzicki, P. Zbierski „Podstawy teorii mnogości".

Odsłońmy karty: ci, co uwierzyli i w wybór i w determinację nabrali się. System zawierający oba te aksjomaty (i inne, powszechnie przyjmowane i na ogół nie budzące kontrowersji) jest sprzeczny! Czyli — intuicja kłamała. Pytanie, który aksjomat jest zły? Trudno to rozstrzygnąć, zwłaszcza jeśli ktoś przed chwilą gotów był przyjąć obydwa. W takiej sytuacji dobrze jest przyjrzeć się konsekwencjom obu tych „wrogich sobie" pewników. Może wówczas zdecydujemy się na któryś z nich.

W teorii mnogości z aksjomatem wyboru można udowodnić następujące, przyznajmy dość paradoksalne, **twierdzenie Banacha i Tarskiego**: istnieje rozbicie kuli o promieniu 1 na skończoną ilość takich rozłącznych kawałków, że przesuwając i sklejając pewne z nich otrzymamy jedną kulę o promieniu 1 a przesuwając i sklejając pozostałe — inną kulę, też o promieniu 1. A więc z jednej kuli dwie takie same — każdy przyzna, że to niemożliwe. Ale nie uznając paradoksu Banacha i Tarskiego musimy odrzucić aksjomat wyboru, a wydawał się tak intuicyjny.

Przyjrzyjmy się z kolei aksjomatowi determinacji. Jego ważny i spory „kawałek" jest wręcz twierdzeniem teorii mnogości, tzn. jest „na pewno" prawdziwy. Precyzyjnie: jest konsekwencją innych, powszechnie uznawanych aksjomatów. Chodzi mianowicie o tzw. determinację borelowską, która orzeka, że któryś z graczy ma strategię zwycięską w grze G_A, jeśli tylko zbiór A jest borelowski (tzn. ma odpowiednio regularną budowę). Może więc przyjąć aksjomat determinacji? Ale wtedy trzeba się pogodzić z tak samo dziwnymi jak paradoksalny rozkład kuli konsekwencjami — choć dotyczą one bardziej skomplikowanych obiektów. Przykładem niech będzie wynikający z aksjomatu determinacji fakt, że każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Z drugiej strony, przyjęcie każdego z rozważanych pewników ma swoje zdecydowane zalety. Z aksjomatu wyboru wynika szereg ważnych dla całej matematyki faktów: twierdzenie Tichonowa mówiące, że iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych jest zwarty, twierdzenie o istnieniu bazy w każdej przestrzeni liniowej i wiele innych. Zaletą aksjomatu determinacji jest zaś np. to, że wyklucza on paradoks Banacha i Tarskiego.

Który aksjomat jest „lepszy", rozstrzygnąć nie sposób. Obu naraz przyjąć nie wolno, można — według osobistych upodobań — uznać jeden z nich lub nie zgodzić się na żaden. W ostatnim jednak przypadku znacznie zmniejszy się siła dowodowa zubożonej w ten sposób teorii mnogości.



Niezależnie zaś od decyzji „wybór czy determinacja" powyższe przykłady zdołały chyba przekonać Czytelnika, że intuicje bywają w matematyce zawodne i nie zawsze obejmują wszystkie konsekwencje rozważanych faktów.