2. Czy liczba 9999999999999991008 jest podzielna przez 72? Oczywiście, że… . Na pewno szybko znajdziesz odpowiedź. A czy potrafisz *udowodnić* znaną cechę podzielności przez 9?

Jak rozwiązujemy równania?

Dr Michał SZUREK

Niewiele jest przesady w stwierdzeniu, że matematyka istnieje po to, abyśmy umieli rozwiązywać równania. A równania są przecież wszędzie: w poznawaniu kosmosu, przy badaniu elementarnych cząstek materii, budowie dróg i planowaniu gospodarczym.

Znamy ze szkoły wzory na pierwiastki równania kwadratowego i — być może — sześciennego. Są jeszcze wzory dla równań czwartego stopnia. W r. 1826 norweski matematyk, Niels Henryk Abel, udowodnił, że gdy dane jest równanie piątego stopnia

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$$

to — poza bardzo wyjątkowymi przypadkami — nie istnieją wzory, wyrażające pierwiastki tego równania w zależności od współczynników, za pomocą czterech działań arytmetycznych i wyciągania pierwiastka. Użyta przez Abela metoda dała początek całej algebrze abstrakcyjnej, to jest gałęzi matematyki badającej ogólne właściwości zbiorów i określonych w nich działań. Abel związał bowiem z każdym równaniem jego tak zwaną *grupę Galois* i wykazał, że o możliwości rozwiązania równania (ściślej: o możliwości podania wzorów, w których użyjemy tylko $+$, $\cdot$, $-$, $:$ i $\sqrt[n]{\ }$) decydują pewne abstrakcyjne własności tej grupy.

Co to znaczy „umieć rozwiązać równanie"? Proste pytanie, powiedzą Czytelnicy. To przecież znaczy „umieć znaleźć jego pierwiastki"! Ale między „umieć" a „umieć" — też jest różnica. Nasi przodkowie nadzwyczaj rzadko *naprawdę* potrzebowali znaleźć rozwiązanie skomplikowanego równania, wobec czego „umiejętność rozwiązywania" pojmowali raczej idealistycznie — byle był wzór, nawet nie nadający się praktycznie do niczego. O zaprezentowanych poniżej metodach, dających szybko dowolnie dokładne rozwinięcie pierwiastka, mawiano pogardliwie: Phi, to tylko metody przybliżone!

Dziś musimy umieć efektywnie szukać i znajdować rozwiązania. Dlatego i teoria równań, i w ogóle cała matematyka, algorytmizuje się. Wyżej cenimy *przepisy* (przesiać 30 dag mąki, dodać 20 dag masła, posiekać dokładnie mieszając, włożyć 4 surowe żółtka, przesiany cukier i zmielone orzechy; zagnieść ciasto, ułożyć na blasze i piec 10 minut…) niż ogólne opisy (rożki orzechowe robi się z mąki, jajek, masła, cukru i orzechów, a piecze się w piekarniku) lub ogólne rady („weź nadgodziny, zarobisz 200 zł więcej i kupisz w Hortexie"). Odnosi się to też do wykładów algebry i analizy matematycznej, a o metodach stycznej i siecznej mówi się: oto proste i szybko zbieżne algorytmy!

Jeżeli chcemy obliczyć pierwiastek równania (nawet z dużą dokładnością) a mamy choć kalkulator, to metoda „prób i błędów" nie jest zupełnie do niczego. Lepsza jest jednak metoda połowienia (tablica obok). Zilustrujemy ją na przykładzie równania

$$f(x) = \frac{1}{x} - 0{,}3 = 0,$$

którego pierwiastkiem jest oczywiście $x = \frac{10}{3} = 3{,}33333\ldots$ Niech $p = 3$ i $q = 4$ (krok 1); wtedy $h = 3{,}5$. Ta wartość h jest pierwszym przybliżeniem naszego pierwiastka $x = 3{,}33333\ldots$

Rozwiązywanie równania $f(x) = 0$ metodą połowienia.

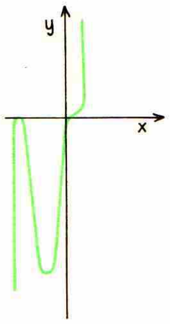
Krok 1. Wybierz p i q, tak by $f(p)$ i $f(q)$ miały różne znaki.

Krok 2. Oblicz $h = \frac{p+q}{2}$.

Krok 3. Oblicz $f(h)$.

Krok 4. Jeżeli $f(h) = 0$, to $x = h$ jest rozwiązaniem;
Stop!

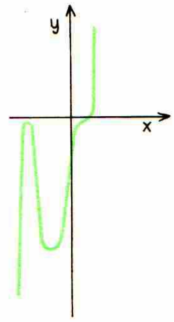
Krok 5. Jeżeli $f(h)$ i $f(p)$ mają ten sam znak, zastąp p przez h, a $f(p)$ przez $f(h)$.
W przeciwnym razie zastąp q przez h i $f(q)$ przez $f(h)$. Teraz wróć do kroku 2.



3. Na rysunku obok widzisz wykres funkcji

$$f(x) = x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4 \equiv (x+2)^2(x-1).$$

Czy znajdzie się taki *wielomian*, którego wykres wygląda tak, jak na rysunku niżej, to znaczy ma skrócony jeden łuk tak, jak na rysunku?



Metoda siecznej

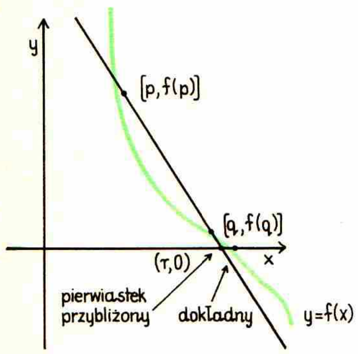
Krok 1. Wybierz dwie liczby p, q, leżące blisko rozwiązania.

Krok 2. Oblicz $r = q - \dfrac{(p-q)\cdot f(q)}{f(p)-f(q)}$.

Krok 3. Oblicz $f(r)$.

Krok 4. Jeżeli $f(r) = 0$; stop!

Krok 5. Jeżeli $|f(p)| \geq |f(q)|$, to zastąp p przez r, a $f(p)$ przez $f(r)$. W przeciwnym razie zastąp q przez r, zaś $f(q)$ przez $f(r)$. Wróć do kroku 2.



Metoda stycznej (metoda Newtona)

Krok 1. Wybierz dowolne p (blisko rozwiązania).

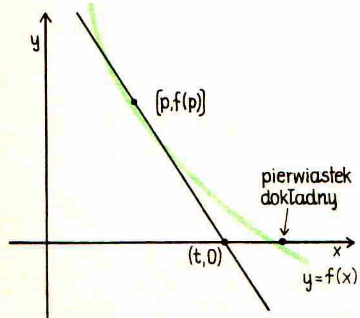
Krok 2. Oblicz $f(p)$.

Krok 3. Jeżeli $f(p) = 0$; stop!

Krok 4. Oblicz $f'(p)$.

Krok 5. Oblicz $t = p - \dfrac{f(p)}{f'(p)}$.

Krok 6. Podstaw $p = t$.
Wróć do kroku 2.



Ponieważ $f(h) = -0{,}14285714$ i $f(3)$ mają różne znaki, więc rozwiązanie leży między 3 a 3,5. Następne h jest równe $\frac{1}{2}(3+3{,}5) = 3{,}25$, a ponieważ $f(h) = 0{,}00769231$, więc prawdziwe rozwiązanie leży między 3,25 a 3,5. Dalsze postępowanie przyniesie taki ciąg przybliżonych rozwiązań: 3,375, 3,3125, 3,34375, 3,328125. Widzimy, że zbieżność do granicy 3,33333... jest dosyć powolna.

Dlatego zazwyczaj lepsza jest metoda siecznej (tablica obok). Metodą tą otrzymamy szybciej zbieżny ciąg rozwiązań 2, 3, 3,2, 3,32, 3,3328, 3,3333312, 3,33333333. Nazwę „metoda siecznej" uzasadnia rysunek: każde kolejne przybliżenie rozwiązania jest punktem przecięcia osi x-ów przez sieczną łączącą $(q, f(q))$ z $(p, f(p))$.

Metoda następna to metoda „stycznej" (tablica obok). Stosując ją do równania

$$f(x) = x^3+6x^2+6x-2 = 0$$

mamy kolejno

$$f'(x) = 3x^2+12x+6 = 3(x^2+4x+2); \text{ i dalej:}$$

Przybliżenie Nr	p	$f(p)$	$f'(p)$	$t = p - \dfrac{f(p)}{f'(p)}$
1	0	-2	6	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0,7037037	10,333333	0,26523297
3	0,26523297	0,03214774	9,39384	0,2369982
4	0,2369982	$-0{,}22769017$	9,0124826	0,26156369
5	0,26156369	$-0{,}00222945$	9,344011	0,26180229
6	0,26180229	0,00000042	9,3472488	0,26180224
7	0,26180224	0,0000000022		

„Dokładnym "wzorem na pierwiastek tego równania jest

$$x = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

gdzie $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ i $180° < \varphi < 360°$

(w przybliżeniu $\varphi = 249°$, 29519).

Uzasadnienie nazwy „metoda stycznej" znów widać na rysunku. Wspomnimy, że użycie opisanych metod obwarowane jest pewnymi założeniami, których tu jednak dyskutować nie będziemy, ponieważ tylko dla stosunkowo skomplikowanych równań mogą one nie być spełnione.