Prawo powszechnego ciążenia (według Newtona)

Doc. dr Piotr MANKIEWICZ

Wszyscy dobrze znają anegdotkę o tym, jak to Newton odkrył prawo powszechnego ciążenia pod wpływem jabłka, które mu spadło na głowę, anegdotkę równie popularną co bezsensowną. Bowiem w owym czasie nie istniały „ziemskie" fakty pozwalające na pełne sformułowanie tego prawa. W przebłysku natchnienia geniusz mógłby zaryzykować stwierdzenie „każde dwa ciała się przyciągają" zamiast przyjętego do tej pory „Ziemia przyciąga każde ciało". Z drugiej jednak strony, występujące na Ziemi siły przyciągania różne od (Ziemia — inne ciało) były w ówczesnych warunkach nie do zaobserwowania nie mówiąc już o ich zmierzeniu. Przypomnijmy, że laboratoryjne sprawdzenie prawa powszechnego ciążenia, a więc pierwsze jego potwierdzenie w warunkach ziemskich nastąpiło po ponad 100 latach. Nasuwa się pytanie: Skąd Newton wziął ilościową formę swojego prawa — owo $\frac{1}{r^2}$? Nie mógł mu tego nasunąć widok żadnego spadającego jabłka, a przecież tego nie zgadł! *Praw przyrody nikt nie zgaduje*, można je tylko *wnioskować na podstawie obserwacji* tejże przyrody. Więc skąd się wzięło $\frac{1}{r^2}$?

Odpowiedź na to pytanie zawarta jest w zachowanej na szczęście relacji z rozmowy Halley'a z Newtonem:

Halley: **Jak wyglądałaby siła, która powoduje, że planety krążą po orbitach eliptycznych?**
Newton: **Odwrotność kwadratu** (odległości).
Halley: **Skąd Pan to wie?**
Newton: **Po prostu, obliczyłem.**
Mógł obliczyć to Newton, możemy i my! Ale

Zasady dynamiki Newtona

I. Zasada bezwładności. Istnieją ciała (inercjalne układy odniesienia), które poruszają się ze stałą prędkością po prostej.

II. $F = m \cdot a$. Pojawienie się przyspieszenia w ruchu ciała, obserwowanym z inercjalnego układu odniesienia, jest równoważne stwierdzeniu, że ciało to podlega zewnętrznemu działaniu jakiegoś dodatkowego ciała. Miarą tego działania jest siła, która powinna być określona z innych praw mechaniki (np. prawa powszechnego ciążenia) w ten sposób, by przyspieszenie ciała było proporcjonalne do działającej nań siły.

III. Zasada akcji i reakcji. Każde ciało działające na inne pewną siłą musi przy tym samo podlegać działaniu równej i przeciwnie skierowanej siły pochodzącej od tego drugiego ciała. Działanie sił jest więc zawsze wzajemne, a obie towarzyszące sobie siły są zawsze tego samego rodzaju (np. obie grawitacyjne lub obie sprężyste itp.).

Newton we wstępie do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) sformułował to tak:

Prawo I: *Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.*

Prawo II: *Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.*

Prawo III: *Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie, skierowane przeciwnie i równe, tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie.*

Nic za darmo

Przytoczony powyżej fragment rozmowy dowodzi, że Newton wywnioskował prawo powszechnego ciążenia z praw rządzących ruchem planet — tzw. praw Keplera. Były to jedyne, do czasu doświadczeń Cavendisha znane wówczas fakty, z których można to było zrobić. Poniżej zostanie pokazane jak można „wyliczyć" z praw Keplera prawo powszechnego ciążenia. Ponieważ, jak wynika z kłopotów związanych z jego sprawdzeniem, prawo to jest bardzo „delikatne", nie należy więc mieć nadziei, że „rachunek" będzie łatwy. Wiadomo, nadzieja... Wszystko to zgodnie z ogólną zasadą (zachowania informacji?), że żeby dojść do nietrywialnych wyników trzeba się „trochę" napracować.

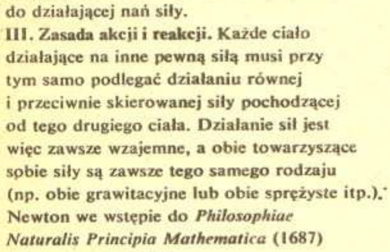
Ponieważ, jako się rzekło, rachunek nie jest najłatwiejszy, umówmy się Czytelniku, na samym początku, że wyjmiesz kartkę papieru i weźmiesz ołówek do ręki, że liczyć będziemy wspólnie, razem — to znaczy Ty i ja.

Fakty które będą nam potrzebne, a których możesz nie znać

F1. Jeżeli na płaszczyźnie dana jest we współrzędnych biegunowych (r, φ) krzywa $r = r(\varphi)$ to pole S figury zakreślonej przez odcinek $[0, r(\varphi)]$ dla $\varphi \in [\alpha, \beta]$ wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Dowód tego wynika bezpośrednio z rysunku na marginesie, oraz z definicji całki jako granicy sum Riemanna.



$$S = \lim \sum_i \frac{1}{2} r^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

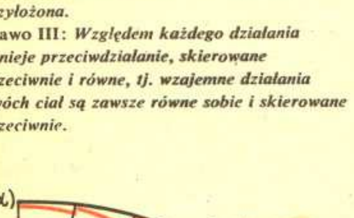
F2. Jeżeli $\mathcal{E}$ jest elipsą na płaszczyźnie, to przy odpowiednim wyborze współrzędnych biegunowych (początek układu współrzędnych w ognisku i kąt mierzymy od dłuższej półosi $\mathcal{E}$)

jej równanie ma postać

$$r = \frac{A}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

gdzie $A > 0$ i $\varepsilon \in (0, 1)$ są pewnymi stałymi związanymi z rozmiarem i kształtem elipsy. Można to sprawdzić wychodząc od równania elipsy we współrzędnych kartezjańskich.

PIERWSZE PRAWO KEPLERA



K1. ***Planety poruszają się w płaszczyznach zawierających Słońce po orbitach eliptycznych. Słońce znajduje się w ognisku elipsy.*** **Niech S — oznacza Słońce, a P — dowolną ustaloną planetę.**

Wybierzmy w płaszczyźnie trajektorii planety P układ współrzędnych biegunowych (r, φ) tak, aby pozycja P w chwili t zadana była równaniem

$$r(t)(1 - \varepsilon\cos\varphi(t)) = A \qquad (1)$$

(Słońce w początku układu współrzędnych a kąt mierzymy od dłuższej półosi orbity P — por. F1.).

DRUGIE PRAWO KEPLERA

K2. *Odcinek łączący Słońce z planetą zakreśla równe pola w równych odcinkach czasu.* Innymi słowy pole $S(t, t_0)$ zakreślone przez odcinek $\overline{OP}$ w czasie od t_0 do t jest równe $B(t-t_0)$, gdzie B jest pewną stałą związaną z „zachowywaniem się" planety P. Z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie i z F1. mamy, że

$$S(t, t_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} r^2(\theta)\varphi'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = B(t-t_0).$$

Zatem, z Podstawowego Twierdzenia Analizy (Newton, Leibniz) wnioskujemy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t_0, t) = \frac{1}{2}r^2(t)\varphi'(t) = B,$$

skąd dostajemy

(2) $$r^2(t)\varphi'(t) = 2B.$$

W dalszym ciągu będziemy opuszczali zmienną t pamiętając jednak, że r i φ są funkcjami t.

Kierunek siły grawitacji czyli pierwszy sukces częściowy

Jeżeli zróżniczkujemy (2) i podzielimy przez r, to otrzymamy

(3) $$2r'\varphi' + r\varphi'' = 0.$$

Z drugiej strony, współrzędne kartezjańskie planety P w chwili t są równe

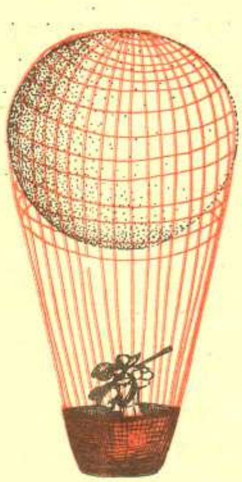
$$x(t) = r\cos\varphi \quad \text{i} \quad y(t) = r\sin\varphi$$

tak, że współrzędne wektora prędkości planety P wyrażają się wzorami

$$x'(t) = r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi,\ y'(t) = r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi.$$

Podobnie, różniczkując raz jeszcze, otrzymujemy, że wektor przyspieszenia $\boldsymbol{a}(t) = (x''(t), y''(t))$ planety P ma współrzędne kartezjańskie

$$x''(t) = r''\cos\varphi - 2r'\varphi'\sin\varphi - r(\varphi')^2\cos\varphi - r\varphi''\sin\varphi,$$
$$y''(t) = r''\sin\varphi + 2r'\varphi'\cos\varphi - r(\varphi')^2\sin\varphi + r\varphi''\cos\varphi.$$



Korzystając z równości (3), dostajemy

(4) $$x''(t) = [r'' - r(\varphi')^2]\cos\varphi \quad \text{i} \quad y''(t) = [r'' - r(\varphi')^2]\sin\varphi.$$

Zapiszmy to nieco inaczej, a mianowicie

$$x''(t) = \left[\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right] r\cos\varphi = \left[\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right] x(t)$$
$$y''(t) = \left[\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right] r\sin\varphi = \left[\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right] y(t).$$

Ostatecznie wnioskujemy, że

(5) $$\boldsymbol{a}(t) = \left[\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right]\overrightarrow{OP}(t).$$

Ponieważ, na mocy drugiego prawa mechaniki Newtona $\boldsymbol{F}(t) = m\boldsymbol{a}(t)$ uzyskaliśmy pierwszy sukces: Kierunek siły $\boldsymbol{F}(t)$, która powoduje zakrzywienie toru planety P jest równoległy (5) do wektora $\overrightarrow{OP}$ (od Słońca do planety), a jej wielkość jest równa, na mocy (4)

(6) $$|\boldsymbol{F}(t)| = |m\boldsymbol{a}(t)| = m|[r'' - r(\varphi')^2]|,$$

gdzie m oznacza masę planety P.

Nareszcie jest $\frac{1}{r^2}$, czyli drugi sukces częściowy

Wyliczymy teraz, czemu jest równe $r'' - r(\varphi')^2$. W tym celu zróżniczkujemy równanie (1) i pomnożymy je przez r. Dostajemy $rr'(1-\varepsilon\cos\varphi) + \varepsilon r^2\varphi'\sin\varphi = 0$, co po uwzględnieniu równości (1) i (2) daje $Ar' + 2B\varepsilon\sin\varphi = 0$. Różniczkując jeszcze raz, otrzymujemy

(7) $$Ar'' + 2B\varepsilon\varphi'\cos\varphi = 0.$$

Ponownie uwzględniając (2), mamy $r'' = -\dfrac{4B^2}{r^2}\,\dfrac{\varepsilon\cos\varphi}{A}$.

Rozwiązanie zadania F 97.
Naturalny ruch balonu jest wynikiem przemian energetycznych zachodzących w układzie: Ziemia, jej atmosfera, balon. W trakcie wznoszenia balonu, wzrasta energia potencjalna sił ciężkości układu: balon—Ziemia, maleje natomiast dla układu: atmosfera—Ziemia, do przestrzeni opróżnianej przez balon napływa bowiem powietrze przezeń wypierane. Ruchowi balonu do góry towarzyszy ciągle „spadanie" powietrza. Sumaryczna energia potencjalna maleje, czemu w idealnym przypadku bez oporów towarzyszyć winien wzrost energii kinetycznej. Rozważmy przemieszczenie nieściśliwego ciała o masie m i objętości V na wysokość h. Niech odbywa się to w nieściśliwym płynie o gęstości ϱ_p i jednorodnym polu sił ciężkości (przyspieszenie g). Zmiana energii potencjalnej układu wynosi:

$$\Delta E_u = (mgh - 0) + (0 - V\varrho_p gh) = (m - V\varrho_p)gh.$$

Kierunek ruchu będzie oczywiście zależał od różnicy gęstości płynu i ciała.

W końcu wyliczając z (1) — $\varepsilon\cos\varphi$, oraz jeszcze raz uwzględniając (2) dostajemy ostatecznie coś, co da się „wstawić" do (6): $r''-r(\varphi')^2 = -\frac{4B^2}{A}\cdot\frac{1}{r^2}$

Sukces drugi: Wielkość siły $F(t)$ jest w każdej chwili t proporcjonalna do odwrotności kwadratu odległości r planety P od Słońca i jest ona skierowana w stronę Słońca przeciwnie niż wektor $\overrightarrow{OP}$. Zachodzi równość

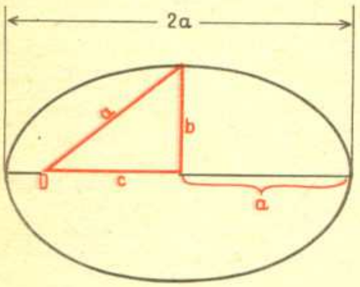
(8) $$|F(t)| = \frac{4B^2}{A}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot m = \frac{\mu}{r^2}\cdot m,$$

gdzie $\mu = 4B^2/A$.

TRZECIE PRAWO KEPLERA

K3. *Sześcian średniej arytmetycznej największej i najmniejszej odległości planety od Słońca po podzieleniu przez kwadrat czasu jednego obiegu dookoła Słońca jest dla każdej planety (naszego układu słonecznego) taki sam.*

Ze wzoru (1) łatwo zauważyć, że jeżeli a i b są odpowiednio dłuższą i krótszą półosią elipsy danej równaniem (1), to średnia arytmetyczna, o której mowa wyżej wynosi a oraz $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ i $A = a(1-\varepsilon^2)$ (patrz rysunek).



odległość min. $= \frac{A}{1+\varepsilon}$, odległość max. $= \frac{A}{1-\varepsilon}$, ich średnia arytmetyczna $a = \frac{A}{1-\varepsilon^2}$, $c = a - \frac{A}{1+\varepsilon}$, $b = a\sqrt{1-.^2}$

Zatem, trzecie prawo Keplera stwierdza, że istnieje taka stała C, że dla każdej planety mamy

(9) $$\frac{a^3}{T^2} = C,$$

gdzie a jest dłuższą półosią jej elipsy a T jest czasem jednego obiegu.

Finisz, czyli zryw końcowy

Pole S elipsy o półosiach a i b wyraża się wzorem $S = \pi ab$. Z definicji B dostajemy więc $B = \frac{\pi ab}{T}$, a ponieważ $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, więc otrzymujemy $B = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$.

Podstawiając to do wzoru (8) mamy (wobec tego, że $A = a(1-\varepsilon^2)$ — rysunek na marginesie), że wielkość siły $F(t)$ wyraża się wzorem

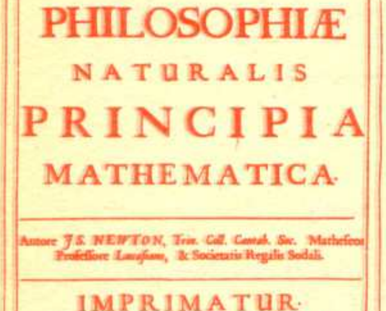
(10) $$|F| = \frac{4B^2}{A}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot m = \frac{4\pi C}{r^2}\cdot m,$$

gdzie C jest stałą z trzeciego prawa Keplera, taką samą dla każdej planety. A więc ogólnym wzorem na siłę powodującą zakrzywienie trajektorii planet (sukces drugi i (10)) jest (we współrzędnych kartezjańskich)

(11) $$F(t) = -\frac{4\pi C}{r^2(t)}\cdot m\big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big).$$

Okazuje się jednak, że dla układu Ziemia—Księżyc i Jowisz — jego księżyce wychodzą zupełnie inne stałe C!

Lecą jabłka, lecą


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Teraz, Czytelniku, możesz pójść do sadu i stanąć pod jabłonką. Być może, kiedy już to wszystko wiesz, jabłko spadające na Twoją głowę olśni Cię wystarczająco byś zauważył, że (10) można napisać w postaci

(12) $$|F(t)| = \frac{\gamma}{r^2(t)}\,m\cdot M_\odot,$$

gdzie $M_\odot$ jest masą Słońca (a $\gamma = 4\pi C/M_\odot$) i dostrzegł, że różne stałe C uzyskane dla innych układów np. Ziemia—Księżyc są **spowodowane tym, że to właśnie** $\frac{4\pi C}{M_\odot} = \gamma$ **jest stałe!** A więc to wzór (12) zawiera najogólniejszą prawidłowość: Siła z jaką Słońce i Planeta przyciągają się wzajemnie jest proporcjonalna do iloczynu ich mas podzielonego przez kwadrat odległości między nimi. Uogólnienie tego faktu na wszelkie obiekty materialne jest już przedsięwzięciem stosunkowo naturalnym.

Na koniec zauważmy, że z prawa powszechnego ciążenia i praw mechaniki Newtona wynika, że Słońce nie jest nieruchome, lecz podlega pewnym ruchom pod wpływem sił grawitacyjnych planet układu słonecznego. Jednakże, ponieważ masa Słońca jest wielokrotnie większa niż masy planet, ruchy te są stosunkowo nieznaczne i zostały zaobserwowane o wiele później. Mamy więc kolejną (po Keplerze) poprawkę do teorii Kopernika, ale to całkiem inna historia, tym razem taka, która cieszy, a nie martwi.