Zapisać rzecz prostą w sposób skomplikowany

Dr Marcin E. KUCZMA

Do wzoru (2) wiązanego z nazwiskiem Stirlinga doszli niezależnie w 1730 roku Stirling i de Moivre. Żaden z nich nie był w stanie podać naprawdę ścisłego dowodu, pierwsze pełne dowody pochodzą dopiero od Gaussa.
Wzór Stirlinga dla $n = 20$ daje $20! = 24288 \cdot 10^{14}$, podczas gdy dokładną wartością jest $20! = 2432902008176640000$; błąd względny wzoru Stirlinga wynosi tu więc ok. 0,4 procenta.

O pewnym profesorze mówiono: To bardzo mądry człowiek — potrafi najprostszą ideę zawikłać tak, że jedynie najbystrzejsi słuchacze są w stanie go zrozumieć ... Niejeden autor stwarza pozory szczególnej głębi spojrzenia ubierając banalne treści w nadmiernie wyszukaną formę. Czyżby to miało istotnie znamionować klasę uczonego? Czy w ogóle może mieć sens postępowanie w myśl sugestii zawartej w tytule? Spora część badań naukowych w dziedzinach „teoretycznych" polega na wyrażaniu rzeczy skomplikowanych w sposób prostszy — ale także vice versa. O celowości pierwszej z tych metod nie trzeba chyba nikogo przekonywać. Natomiast druga budzi raczej odruch nieufności. Komplikować? Po co?
Nie mamy zamiaru kontynuować rozprawki filozoficznej na temat sensowności komplikowania — choć rozwinięcie tego zagadnienia mogłoby być frapujące. Zamiast tego, ograniczymy się do pewnego przykładu.
W naszym przykładzie „rzeczą prostą" będzie pojęcie silni:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{1}$$

Rzeczywiście: definicja ta jest jasna, zrozumiała, nic tu trudnego ani przesadnie mądrego. No to — zamiast cieszyć się prostotą, napiszemy coś takiego:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\varepsilon_n}, \qquad \text{gdzie} \quad 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{12n}. \tag{2}$$

Jest to sławny **wzór Stirlinga**. Zgodzą się chyba wszyscy, że panu Jamesowi Stirlingowi (1692—1770) udało się zapisać rzecz prostą w sposób wysoce skomplikowany ...
Skąd się bierze ten przedziwny wzór? Zainteresowanych możemy odesłać do podręczników analizy matematycznej (w wielu z nich można znaleźć wzór Stirlinga z pełnym dowodem) — lub też zachęcić do dokończenia czytania niniejszego tekstu.
Samo pojęcie silni bywa w matematyce bardzo użyteczne. Z definicji (1) nie wynikają jednak żadne „rozsądne" reguły działań na symbolu $n!$. Otóż zaleta wzoru (2) tkwi w tym, że wyrażenie stojące po jego prawej stronie dobrze się nadaje do wykonywania operacji arytmetycznych. Najlepiej to zilustrują przykłady.
W różnych zagadnieniach analizy spotyka się ciągi mające w mianowniku $n!$. Czynnik ten uważa się za dość silnie „uzbieżniający"; znaczy to tyle, że $n!$ dąży dość szybko do nieskończoności. Jak szybko? Jak to wymierzyć? Mówimy, że ciąg (b_n) dąży do nieskończoności szybciej niż (a_n) jeśli $\frac{b_n}{a_n} \to \infty$. Jeśli natomiast iloraz ten ma granicę dodatnią skończoną, mówimy, że ciągi (a_n) i (b_n) dążą do nieskończoności jednakowo szybko. Sytuacja jest idealna, gdy tą granicą jest jedynka; wtedy mówimy, że rozważane ciągi są asymptotycznie równe i piszemy: $a_n \approx b_n$ $(n \to \infty)$. Wzór (2) pokazuje, że

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n \to \infty), \tag{3}$$

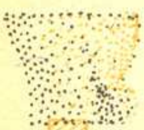
stąd zaś widać natychmiast, że ciąg $(n!)$ dąży do nieskończoności szybciej, niż (n^2), niż (n^3), ogólnie, niż (n^p), gdzie p jest dowolnie dużym wykładnikiem; także szybciej, niż (2^n), niż (3^n), ogólnie, niż (a^n), gdzie a jest dowolnie dużą podstawą; ale wolniej, niż np. ciąg (n^n). Te wnioski można zresztą otrzymać, też bez większego trudu, bezpośrednio z definicji (1). Znacznie bardziej subtelne jest np. stwierdzenie, że ciąg $(n!)$ dąży do nieskończoności szybciej, niż $\left(\frac{1}{3}n\right)^n$, ale wolniej, niż $\left(\frac{1}{2}n\right)^n$. Wywnioskować to wprost z definicji (1) byłoby trudno; natomiast z wzoru (3) jest to widoczne od razu — wystarczy tylko wiedzieć, że $2 < e < 3$.
W zbiorach zadań z analizy matematycznej często można znaleźć takie ćwiczenie: obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

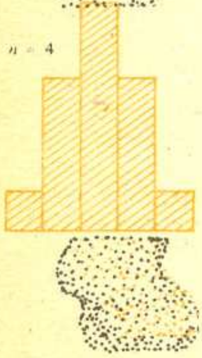
Trójkąt Pascala

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. : : : : : : : : : : : : : : .

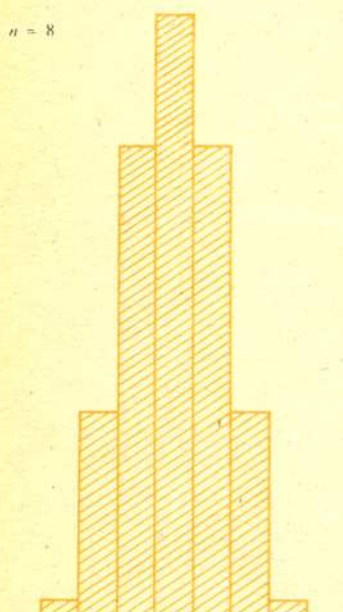
O różnych ciekawych własnościach tego trójkąta pisaliśmy na przykład w numerze 1 1980.



$n = 4$



$n = 8$



Granicę tę da się wyznaczyć metodami całkiem elementarnymi (wystarczą wiadomości szkolne) — ale zadanie jest wtedy niełatwe. Za to dla znających wzór Stirlinga zadanie jest typu „samograj":

$$\frac{1}{n}(n!)^{1/n} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n+\varepsilon_n}\right)^{1/n} = (2\pi n)^{1/2n}\mathrm{e}^{-1+\varepsilon_n/n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

To, że ciąg $(\sqrt[n]{n!})$ dąży do nieskończoności, jest dość jasne (jego wyrazy to średnie geometryczne początkowych odcinków ciągu 1, 2, 3, ...). Otrzymany przed chwilą wynik daje dodatkową informację, że $\sqrt[n]{n!}$ dąży do nieskończoności tak samo szybko, jak n; dokładniej, dostaliśmy równość asymptotyczną

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty).$$

(Kto podejmie trud przeprowadzenia dowodu elementarnego, łacno zrozumie, dlaczego wzór Stirlinga jest „mocnym" twierdzeniem).

Przypomnijmy sobie — dla odmiany — trójkąt Pascala. Jak wiadomo, jego n-ty wiersz (numeracja od $n = 0$) składa się z $n+1$ liczb naturalnych, tak zwanych współczynników Newtona $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0, \ldots, n$. Oto dla przykładu wiersz ósmy:

1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 rozpoczyna się od jedynki, następnie współczynniki wzrastają; począwszy od połowy długości wiersza współczynniki maleją aż do jedynki; część wznosząca jest symetryczna do opadającej. Wymienione własności przysługują wszystkim wierszom trójkąta Pascala. Są one powszechnie znane.

Spróbujmy się zorientować, jaki jest „rozkład masy" w wierszach o dużym numerze. Cóż to znaczy? Wyobraźmy sobie, że podzieliliśmy pewien ustalony, wzorcowy odcinek na $n+1$ równych przegródek i że do każdej z nich sypiemy piasek w ilości proporcjonalnej do odpowiedniego współczynnika $\binom{n}{k}$; przy tym ogólna masa piasku jest stała, niezależna od n — przyjmijmy ją za jedność. Ponieważ suma współczynników Newtona w n-tym wierszu równa się 2^n, więc masa piasku nasypanego do k-tej przegródki będzie równa $2^{-n}\binom{n}{k}$. Gdyby rozkład masy był równomierny, ilość piasku w każdej przegródce byłaby równa $1/(n+1)$. Rzecz jasna, tak nie jest. W przegródkach blisko środka piasku będzie więcej, w przegródkach skrajnych — mniej. Piasek utworzy górkę. Interesuje nas kształt tej górki przy $n \to \infty$.

Gdy n jest parzyste, górka ma wyraźny wierzchołek: n-ty wiersz trójkąta Pascala ma wyraz środkowy, największy. Prześledźmy zachowanie się współczynnika Newtona $\binom{n}{n/2}$, gdy n dąży do ∞ przyjmując wartości parzyste.

Na mocy wzoru Stirlinga [piszemy $n-k = l$]:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n+\varepsilon_n}}{\sqrt{2\pi k}\, k^k \mathrm{e}^{-k+\varepsilon_k} \cdot \sqrt{2\pi l}\, l^l \mathrm{e}^{-l+\varepsilon_l}} = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{n}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{l}\right)^{l+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\varepsilon_n-\varepsilon_k-\varepsilon_l} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{n}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{l}\right)^{l+\frac{1}{2}} \quad (n \to \infty).$$

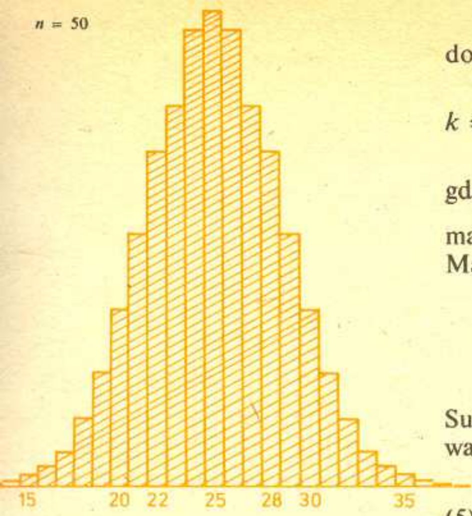
Przyjmijmy $k = l = \frac{1}{2}n$; dostaniemy wtedy

$$2^{-n}\binom{n}{n/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \quad (n \to \infty).$$

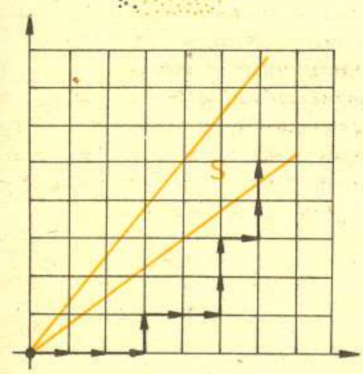
Widać stąd, że ten środkowy współczynnik gromadzi niepokojąco dużą część ogólnej „masy". Zamiast wielkości rzędu $1/n$, która należałaby się przy rozkładzie równomiernym, mamy wielkość rzędu $1/\sqrt{n}$.

A więc wierzchołek górki będzie coraz wyżej. Ponieważ masa ogólna się nie zmienia, można się domyślać, że nasza górka będzie kształtem coraz bardziej przypominać iglicę (rzut oka na rysunki: dla $n = 4$ mamy rozbudowane „podium zwycięzców", dla $n = 8$ sylwetkę Pałacu Kultury i Nauki).

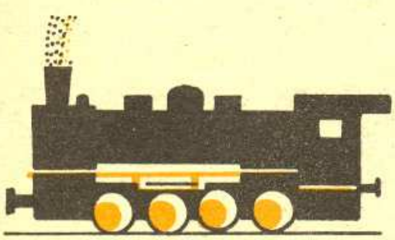
Spróbujmy to udowodnić. Pokażemy mianowicie, że jeśli a jest dowolną liczbą



[x] oznacza część całkowitą liczby x, tj. najmniejszą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.



Do punktu kratowego (k, l) można dotrzeć z punktu $(0, 0)$ na $\binom{k+l}{k}$ sposobów.



dodatnią mniejszą niż $\frac{1}{2}$, to suma współczynników Newtona $\binom{n}{k}$ względem $k \leqslant an$ zgromadzi, przy dużych n, znikomo małą część sumy wszystkich $\binom{n}{k}$, gdy $k \leqslant n$. Przez symetrię, jeśli $\frac{1}{2} < b < 1$, to również „na prawo od b będzie mało masy". Zatem prawie cała masa będzie skupiona blisko środka.
Mamy więc wykazać, że $q_n \to 0$, gdzie

$$q_n = \left(\sum_{k \leqslant an} \binom{n}{k}\right) : \left(\sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k}\right) = 2^{-n} \sum_{k \leqslant an} \binom{n}{k}.$$

Suma ta ma $[a(n+1)]$ składników; największym z nich jest ostatni, odpowiadający wartości $k = [an]$. Stąd oszacowanie (doprawdy, mało subtelne)

$$q_n < 2^{-n}\,[a(n+1)]\binom{n}{[an]}. \tag{5}$$

Prosi się teraz skorzystać z wzoru (4) podstawiając $k = [an]$. Otóż my sobie ułatwimy życie jeszcze bardziej i przyjmiemy po prostu $k = an$ (wyrażenie po prawej stronie wzoru (4) ma sens także dla k i l niekoniecznie całkowitych). Oczywiście $[an] \approx an$ $(n \to \infty)$, więc asymptotyczna równość we wzorze (4) zostanie zachowana:

$$\binom{n}{[an]} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{n}{an}\right)^{an+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{(1-a)n}\right)^{(1-a)n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n a(1-a)}}\left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}}\right)^n.$$

Wobec nierówności (5) ciąg (q_n) szacuje się asymptotycznie przez wyrażenie

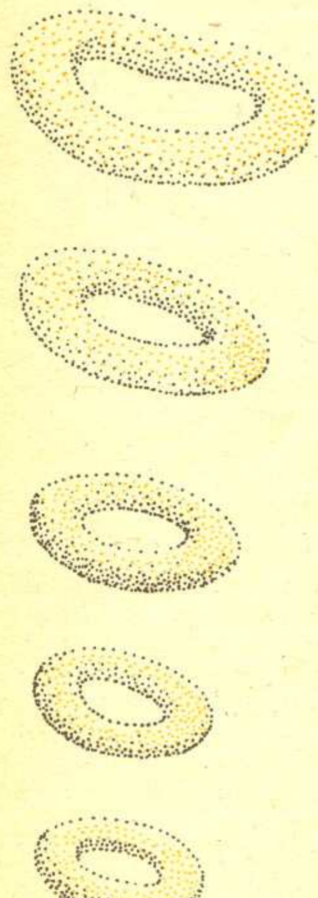
$$\frac{a(n+1)}{\sqrt{2\pi n a(1-a)}}\left(\frac{1}{2a^a(1-a)^{1-a}}\right)^n. \tag{6}$$

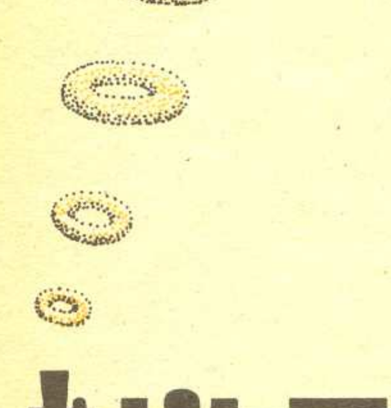
Dla $a \in (0, 1/2)$ liczba w dużym nawiasie jest mniejsza od jedności (co można sprawdzić zwykłą metodą rachunku różniczkowego). Zatem ciąg (6) dąży do zera, wobec czego także $q_n \to 0$ — a o to właśnie chodziło.
Wykorzystując oszacowanie (5)—(6) nietrudno przeliczyć, że jeśli sypiemy piasek na drogę długości 1 kilometra według podanej recepty, przyjmując np. $n = 1000$ (czyli dzieląc ten kilometr na działki metrowej długości), to środkowa stumetrówka zgromadzi $> 99{,}8\%$ całej masy piasku.
Opisane zjawisko można zinterpretować w nieco innym języku. Wyobraźmy sobie, że punkt wędrujący po płaszczyźnie startuje z położenia $(0, 0)$ i w każdym kroku przesuwa się o wektor jednostkowy poziomo w prawo lub pionowo w górę (wybór jest losowy, z równym prawdopodobieństwem). Niech S oznacza dowolny sektor wyznaczony przez dwie półproste wychodzące z punktu $(0,0)$ i zawierający w swoim wnętrzu dwusieczną pierwszej ćwiartki płaszczyzny (prostą $y = x$). Wówczas nasz błądzący punkt znajdzie się w obrębie sektora S z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1, po dostatecznie wielu krokach.

Kolejny, ostatni już, przykład będzie nieco „lżejszej natury". Panowie S, W, N, E grają w brydża. Jaka jest szansa, że w pierwszym rozdaniu S otrzyma 13 trefli, W — 13 kar, N — 13 kierów, a E — 13 pików? Znikoma — to pewne. Przy założeniu pełnej losowości szansa ta równa się oczywiście $1/N$, gdzie N oznacza liczbę wszystkich możliwych rozkładów.
N jest dużą liczbą naturalną. Ale jak dużą? Miliard? Bilion? Ilocyfrowa to liczba? I znów wzór Stirlinga pomoże nam zorientować się w rzędzie jej wielkości. „Ręka" gracza S może być wybrana z talii na $\binom{52}{13}$ sposobów. Dla gracza W zostaje 39 kart, z których 13 można wybrać na $\binom{39}{13}$ sposobów. Z pozostałych 26 kart wybieramy na $\binom{26}{13}$ sposobów kartę gracza N. 13 kart, które zostały, otrzymuje gracz E. Zatem

$$N = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

Za Szczepanem Jeleńskim („Śladami Pitagorasa") podajemy, że $(52!/13!)^4 = 53644737765488792839237440000$. Tamże znajdzie Czytelnik wyliczenie, jak długo trzeba grać w brydża, żeby wyczerpać wszystkie możliwe rozkłady. W. E. Hartley obliczył, że gdyby mieć tyle talii małych, pasjansowych kart, żeby w każdej z nich karty były ułożone inaczej, i gdybyśmy te wszystkie talie schowali ciasno do sześciennego pudełka, to jego przekątna miałaby 201 lat świetlnych.





Zastosujmy wzór (2):

$$52! = \sqrt{104\pi}\, 52^{52} e^{-52+\varepsilon_{52}},$$

$$13! = \sqrt{26\pi}\, 13^{13} e^{-13+\varepsilon_{13}}.$$

Dzieląc pierwszą z tych liczb przez drugą w czwartej potędze dostajemy

$$N = 2^{103,5}(13\pi)^{-1,5}e^{w},$$

gdzie

$$w = \varepsilon_{52} - 4\varepsilon_{13}; \qquad -\frac{1}{39} < w < 0. \tag{7}$$

Interesuje nas liczba cyfr w zapisie dziesiętnym liczby N. Należy w tym celu liczbę N zlogarytmować (przy podstawie 10). Jeśli nie zależy nam zbytnio na dokładności, zastąpmy wielkość 13π przez 40, pomińmy czynnik e^{w} jako bliski jedności i przyjmijmy 0,3 jako przybliżoną wartość log 2. Wówczas rachunki stają się tak proste, że można je wykonać w pamięci. Ich wynik: 28,65. Popełniamy przy tym błąd $< 0{,}2$:

$$28{,}45 < \log N < 28{,}85.$$

A więc N jest liczbą 29-cyfrową! Prowadząc obliczenie staranniej (z użyciem tablic logarytmicznych) otrzymujemy rezultat

$$28{,}72 < \log N < 28{,}74. \tag{8}$$

Na lepszą dokładność (przy zastosowanej metodzie) nie stać nas; dokładność ta jest bowiem ograniczona oszacowaniem (7) wykładnika w. Z nierówności (8) wynika, że

$$5{,}24 \cdot 10^{28} < N < 5{,}49 \cdot 10^{28}.$$

Jest to więc bardzo duża liczba. Gdyby całą powierzchnię kuli ziemskiej, wraz z górami, oceanami itp., obsadzić gęsto brydżystami (4 m² na jeden stolik z czwórką graczy), przyjmując średni czas rozgrywki itd. — dokończenie tego rodzaju spekulacji pozostawimy tym z Czytelników, których to bawi.
Pozostała nam kwestia dowodu wzoru Stirlinga. Zapewne wielu z Czytelników nie lubi przyjmować wiadomości tylko „na wiarę"; wśród nich znajdą się i tacy, którzy wolą potrzebne uzasadnienie wymyślić, niż szperać w literaturze. (Taka postawa nie jest rzadkością i wśród twórczych naukowców; czasem świadczy ona o dociekliwości, czasem o lenistwie).
Dla tych Czytelników podamy tutaj pobieżny szkic tego dowodu. Uzupełnienie szczegółów może stać się interesującym ćwiczeniem.

Rozpatrujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_1 = -1, \qquad a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n}{n-1} - 1 \qquad \text{dla } n > 1.$$

Wyrazy tego szeregu spełniają dla $n > 1$ nierówność $0 < a_n < 1/12n(n-1)$; można to wykazać np. wykorzystując rozwinięcie funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy. Zatem szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a oznaczając przez s jego sumę, zaś przez s_n jego n-tą sumę częściową łatwo dostać oszacowanie na różnicę $\varepsilon_n = s - s_n < 1/12n$.
Przez indukcję sprawdzamy, że

$$s_n = s - \varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n - ln\, n!, \text{ a stąd}$$

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-s+\varepsilon_n}. \tag{9}$$

Powołujemy się teraz na wzór Wallisa (por. np. Delta 8/1980):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}.$$

Po uwzględnieniu wzoru (9) stwierdzamy, że wartość tej granicy wynosi $\frac{1}{4}e^{-2s}$, skąd $e^{-s} = \sqrt{2\pi}$. Podstawiamy to do (9) i wychodzi nam wzór (2).
Jak ten Stirling do tego doszedł?!