Tabela 2. Rozkład zmiennej Y_2 (wyniki z komputera wg metody Monte Carlo)

$P(Y_2 = 0) = 0{,}775$,	$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}775$
$P(Y_2 = 1) = 0{,}095$,	$P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}870$,
$P(Y_2 = 2) = 0{,}005$,	$P(Y_2 \leqslant 2) = 0{,}875$
$P(Y_2 = 3) = 0{,}120$,	$P(Y_2 \leqslant 3) = 0{,}995$
$P(Y_2 = 6) = 0{,}005$,	$P(Y_2 \leqslant 6) = 1$

Tabela 3. Rozkład zmiennej Y_2 (wyniki dokładne)

$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}7744$
$P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}8800$
$P(Y_2 \leqslant 2) = 0{,}8836$
$P(Y_2 \leqslant 3) = 0{,}9892$
$P(Y_2 \leqslant 4) = 0{,}9964$
$P(Y_2 \leqslant 6) = 1{,}0000$

Tabela 4. Zapas części zamiennych

$\beta = 0{,}90$

N	z_β
2	3
3	3
4	3
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	6
11	6
12	7
13	7
14	7
15	7

Następnie sumujemy kolejne pary wyrazów ciągu realizacji zmiennej losowej X i w ten sposób otrzymujemy realizacje zmiennej losowej Y_2. Jest to następujący ciąg realizacji zmiennej losowej Y_2:
0, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0.
Za pomocą częstości względnej szacujemy prawdopodobieństwa:
$P(Y_2 = 0)$, $P(Y_2) = 1$, $P(Y_2) = 3$.
Otrzymujemy

$$P(Y_2 = 0) = 0{,}7, \qquad P(Y_2 = 1) = 0{,}2, \qquad P(Y_2 = 3) = 0{,}1.$$

Mamy zatem:

$$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}7, \qquad P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}9, \qquad P(Y_2 \leqslant 3) = 1.$$

Zgodnie z wzorem (3) dla prawdopodobieństwa wystarczalności $\beta = 0{,}8$ otrzymujemy zapas części $z_\beta = 1$, natomiast dla $\beta = 0{,}95$ jest $z_\beta = 3$.
Należy stwierdzić, że w powyższym przykładzie przyjęta liczba realizacji zmiennej losowej Y_2 jest zbyt mała, aby stosunkowo dobrze oszacować prawdopodobieństwa $P(Y_2 = k)$ oraz $P(Y_2 \leqslant k)$. Dlatego też tego typu obliczenia przeprowadza się na komputerze i wówczas przyjmujemy dużą liczbę realizacji zmiennej losowej Y_N, rzędu 200 i więcej. Powyższy przykład został zrealizowany również na komputerze ODRA-1305 (w Instytucie Budownictwa, Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa) dla liczby realizacji $L = 200$.
Otrzymane oszacowania prawdopodobieństw opisuje zamieszczona obok tabela 2.
A więc w tym prostym przypadku wyniki odnośnie zapasu są identyczne zarówno przy obliczaniu za pomocą komputera, jak i bez niego. Warto tutaj zauważyć, że dla zmiennej losowej Y_2 można też łatwo wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa metodami analitycznymi, bez uciekania się do metod Monte Carlo.
A mianowicie

$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) = 0{,}88 \cdot 0{,}88 = 0{,}7744$;
$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) = 2 \cdot 0{,}0528 = 0{,}1056$;
$P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = 0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0036$;
$P(Y_2 = 3) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 0) = 0{,}1056$;
$P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 1) = 0{,}0072$;
$P(Y_2 = 6) = P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 3) = 0{,}0036$.

Analityczne wyznaczanie prawdopodobieństw $P(Y_N = k)$ oraz $P(Y_N \leqslant k)$ znacznie się komplikuje dla dużych N. Dlatego też w takich przypadkach jedynym efektywnym sposobem postępowania jest metoda Monte Carlo. W tabeli 4 prezentujemy uzyskane z komputera za pomocą metody Monte Carlo wyniki dotyczące zapasów części zamiennych dla $\beta = 0{,}90$ oraz $N = 2, 3, \ldots, 15$ w odniesieniu do rozważanego w poprzednim artykule („Delta" 6/1981) elementu kombajnu zbożowego.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 265. Wewnątrz kwadratu leży pewna liczba odcinków o końcach na obwodzie kwadratu. Suma długości odcinków wynosi 3. Wykazać, że gdy $r < 1/8$, to w kwadracie tym można zmieścić koło o promieniu r nie przecinające żadnego z danych odcinków.
Rozwiązanie na str. 12

M 266. Wykazać, że w wypukłym n-kącie $A_1\ A_2 \ldots A_n$ można znaleźć n-2 takich punktów $B_2, \ldots, B_{n-1}$, że każdy trójkąt $A_i A_j A_k$ zawiera dokładnie jeden z wybranych punktów.
Rozwiązanie na str. 12

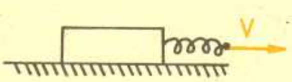
M 267. Szachista gra dla treningu co najmniej jedną partię dziennie, nie więcej jednak niż 12 partii na tydzień. Wykazać, że można znaleźć kilka (kilkanaście) kolejnych dni, w których łącznie zagrał 20 partii.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 96. Na idealnie gładkiej powierzchni stołu spoczywa klocek o masie m. Do klocka przytwierdzona jest nieważka sprężyna o stałej sprężystości k. W pewnej chwili za koniec sprężyny zaczęto ciągnąć ze stałą prędkością v (rys. 1). Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny.

(W. Zielicz)

Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1