Ustalanie zapasów części zamiennych do maszyn rolniczych metodą Monte Carlo

Dr Krzysztof MIKUCKI

Podczas eksploatacji maszyn rolniczych niektóre elementy tych maszyn ulegają uszkodzeniom, których naprawa odbywa się przez wymianę uszkodzonego elementu na nowy. Właściwy przebieg eksploatacji ustalonej grupy maszyn rolniczych danego rodzaju wymaga zapewnienia odpowiedniej liczby elementów wymienianych w czasie eksploatacji. W tym celu należy opracować właściwą metodę ustalania zapasów części zamiennych. Metoda ta powinna uwzględniać losową zmienność liczby wymian elementu w ciągu sezonu agrotechnicznego. Badania statystyczne wykazują, że liczbę wymian elementu w ciągu sezonu agrotechnicznego można opisać za pomocą dyskretnej zmiennej losowej.

Wprowadzamy następujące wielkości:

N — liczba maszyn danego rodzaju,

X — dyskretna zmienna losowa opisująca liczbę wymian elementu w jednej maszynie w ciągu sezonu agrotechnicznego.

β — prawdopodobieństwo tego, że części zamiennych wystarczy.

Niech

(1) $$P(X = x_i) = p_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, ..., r,$$

przy czym rozpatrujemy tylko te wartości x_i, dla których $p_i > 0$.

Oczywiście $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Niech $X_1, X_2, ..., X_N$ będą niezależnymi dyskretnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie określonym wzorem (1). Wówczas zmienna losowa Y_N określona wzorem:

(2) $$Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

stanowi probabilistyczny model zapotrzebowania na części zamienne dla N niezależnie pracujących maszyn rolniczych.

Do wyznaczania zapasów części zamiennych stosujemy następujący wzór

(3) $$z_\beta = \min \{k: \; P(Y_N \leqslant k) \geqslant \beta\}.$$

A więc zapas z_β części zamiennych potrzebnych na jeden sezon do N maszyn rolniczych przy prawdopodobieństwie wystarczalności β równy jest najmniejszej wartości k, dla której prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zapotrzebowanie Y_N nie przekroczy wartości k jest co najmniej równe prawdopodobieństwu wystarczalności β. Efektywne wykorzystanie formuły (3) w praktyce wymaga znajomości prawdopodobieństw $P(Y_N \leqslant k)$. W tym celu musimy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_N.

Wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_N metodami analitycznymi w ogólnym przypadku nie jest możliwe. Dlatego też w takiej sytuacji należy zastosować metodę Monte Carlo, o której w Delcie pisał w 1977 r. R. Zieliński. Istotę zastosowania tej metody omówimy na przykładzie. Za pomocą metod statystycznych wykazano dla wybranego elementu kombajnu zbożowego, że zmienna losowa X ma taki rozkład prawdopodobieństwa, jaki przedstawiony jest w zamieszczonej obok tabeli 1.

Tabela 1. Rozkład prawdopodobieństwa opisanej w tekście zmiennej losowej X

x_i	0	1	3
p_i	0,88	0,06	0,06

Załóżmy, że w celu oszacowania wartości prawdopodobieństw $P(Y_N = k)$ oraz $P(Y_N \leqslant k)$ metodą Monte Carlo potrzebować będziemy $L = 10$ realizacji zmiennej losowej Y_N. Załóżmy również, że grupa kombajnów składa się z $N = 2$ egzemplarzy. Ze sposobu określenia zmiennej losowej Y_N wnioskujemy, że do otrzymania 10 realizacji zmiennej losowej Y_2 potrzeba 20 realizacji zmiennej losowej X. W tym celu tworzymy przedziały:

$$A_0 = (0;\ 0{,}88]$$

$$A_1 = (0{,}88;\ 0{,}94]$$

$$A_3 = (0{,}94;\ 1{,}00]$$

Następnie za pomocą tablicy liczb losowych tworzymy ciąg złożony z 20 realizacji zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym na odcinku (0,1). Niech to będzie następujący ciąg: 0,70; 0,81; 0,96; 0,85; 0,32; 0,48; 0,02; 0,17; 0,37; 0,01; 0,94; 0,38; 0,89; 0,48; 0,25; 0,79; 0,83; 0,39; 0,61; 0,79. Realizacje zmiennej losowej X tworzymy badając warunek przynależności kolejnych wyrazów ciągu do przedziałów A_0, A_1, A_3. Jeżeli wyraz ciągu należy do przedziału A_0, to realizacja zmiennej losowej X równa się 0; jeżeli do A_1, to realizacja wyniesie 1; jeżeli należy do A_3, to realizacja równa się 3.

Powyższe postępowanie spowoduje otrzymanie następującego ciągu realizacji zmiennej losowej X: 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

Tabela 2. Rozkład zmiennej Y_2 (wyniki z komputera wg metody Monte Carlo)

$P(Y_2 = 0) = 0{,}775$,	$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}775$
$P(Y_2 = 1) = 0{,}095$,	$P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}870$,
$P(Y_2 = 2) = 0{,}005$,	$P(Y_2 \leqslant 2) = 0{,}875$
$P(Y_2 = 3) = 0{,}120$,	$P(Y_2 \leqslant 3) = 0{,}995$
$P(Y_2 = 6) = 0{,}005$,	$P(Y_2 \leqslant 6) = 1$

Tabela 3. Rozkład zmiennej Y_2 (wyniki dokładne)

$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}7744$
$P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}8800$
$P(Y_2 \leqslant 2) = 0{,}8836$
$P(Y_2 \leqslant 3) = 0{,}9892$
$P(Y_2 \leqslant 4) = 0{,}9964$
$P(Y_2 \leqslant 6) = 1{,}0000$

Tabela 4. Zapas części zamiennych

$\beta = 0{,}90$

N	z_β
2	3
3	3
4	3
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	6
11	6
12	7
13	7
14	7
15	7

Następnie sumujemy kolejne pary wyrazów ciągu realizacji zmiennej losowej X i w ten sposób otrzymujemy realizacje zmiennej losowej Y_2. Jest to następujący ciąg realizacji zmiennej losowej Y_2:

0, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0.

Za pomocą częstości względnej szacujemy prawdopodobieństwa:

$P(Y_2 = 0)$, $\quad P(Y_2) = 1$, $\quad P(Y_2) = 3$.

Otrzymujemy

$$P(Y_2 = 0) = 0{,}7, \qquad P(Y_2 = 1) = 0{,}2, \qquad P(Y_2 = 3) = 0{,}1.$$

Mamy zatem:

$$P(Y_2 \leqslant 0) = 0{,}7, \qquad P(Y_2 \leqslant 1) = 0{,}9, \qquad P(Y_2 \leqslant 3) = 1.$$

Zgodnie z wzorem (3) dla prawdopodobieństwa wystarczalności $\beta = 0{,}8$ otrzymujemy zapas części $z_\beta = 1$, natomiast dla $\beta = 0{,}95$ jest $z_\beta = 3$.

Należy stwierdzić, że w powyższym przykładzie przyjęta liczba realizacji zmiennej losowej Y_2 jest zbyt mała, aby stosunkowo dobrze oszacować prawdopodobieństwa $P(Y_2 = k)$ oraz $P(Y_2 \leqslant k)$. Dlatego też tego typu obliczenia przeprowadza się na komputerze i wówczas przyjmujemy dużą liczbę realizacji zmiennej losowej Y_N, rzędu 200 i więcej. Powyższy przykład został zrealizowany również na komputerze ODRA-1305 (w Instytucie Budownictwa, Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa) dla liczby realizacji $L = 200$.

Otrzymane oszacowania prawdopodobieństw opisuje zamieszczona obok tabela 2.

A więc w tym prostym przypadku wyniki odnośnie zapasu są identyczne zarówno przy obliczaniu za pomocą komputera, jak i bez niego. Warto tutaj zauważyć, że dla zmiennej losowej Y_2 można też łatwo wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa metodami analitycznymi, bez uciekania się do metod Monte Carlo.

A mianowicie

$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) = 0{,}88 \cdot 0{,}88 = 0{,}7744;$

$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) = 2 \cdot 0{,}0528 = 0{,}1056;$

$P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = 0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0036;$

$P(Y_2 = 3) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 0) = 0{,}1056;$

$P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 1) = 0{,}0072;$

$P(Y_2 = 6) = P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 3) = 0{,}0036.$

Analityczne wyznaczanie prawdopodobieństw $P(Y_N = k)$ oraz $P(Y_N \leqslant k)$ znacznie się komplikuje dla dużych N. Dlatego też w takich przypadkach jedynym efektywnym sposobem postępowania jest metoda Monte Carlo. W tabeli 4 prezentujemy uzyskane z komputera za pomocą metody Monte Carlo wyniki dotyczące zapasów części zamiennych dla $\beta = 0{,}90$ oraz $N = 2, 3, \ldots, 15$ w odniesieniu do rozważanego w poprzednim artykule („Delta" 6/1981) elementu kombajnu zbożowego.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 265. Wewnątrz kwadratu leży pewna liczba odcinków o końcach na obwodzie kwadratu. Suma długości odcinków wynosi 3. Wykazać, że gdy $r < 1/8$, to w kwadracie tym można zmieścić koło o promieniu r nie przecinające żadnego z danych odcinków.

Rozwiązanie na str. 12

M 266. Wykazać, że w wypukłym n-kącie $A_1 A_2 \ldots A_n$ można znaleźć n-2 takich punktów $B_2, \ldots, B_{n-1}$, że każdy trójkąt $A_i A_j A_k$ zawiera dokładnie jeden z wybranych punktów.

Rozwiązanie na str. 12

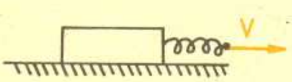
M 267. Szachista gra dla treningu co najmniej jedną partię dziennie, nie więcej jednak niż 12 partii na tydzień. Wykazać, że można znaleźć kilka (kilkanaście) kolejnych dni, w których łącznie zagrał 20 partii.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 96. Na idealnie gładkiej powierzchni stołu spoczywa klocek o masie m. Do klocka przytwierdzona jest nieważka sprężyna o stałej sprężystości k. W pewnej chwili za koniec sprężyny zaczęto ciągnąć ze stałą prędkością v (rys. 1). Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny.

(W. Zielicz)



Rys. 1

Rozwiązanie na str. 7