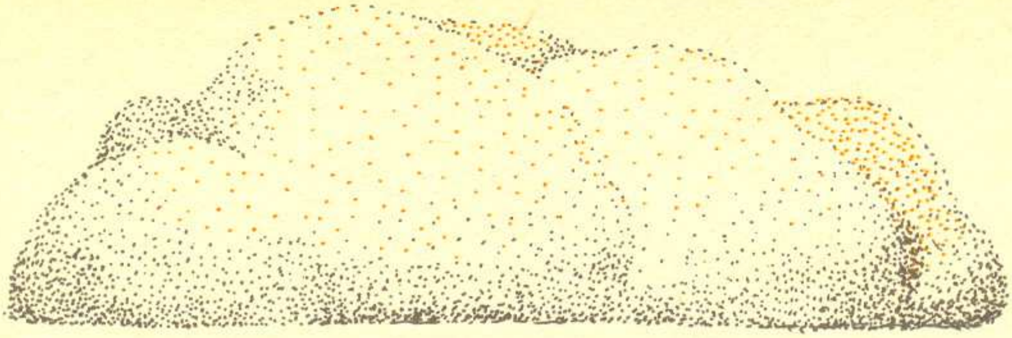
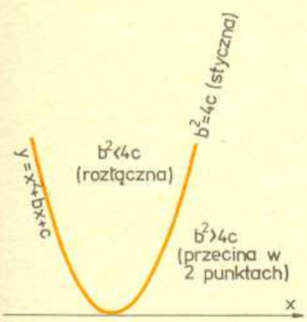


Typowe, to znaczy jakie?



Rys. 1. Dowolnie małe zaburzenie parametrów niszczy styczność

Czy styczność dwu krzywych jest zjawiskiem typowym, normalnym? Rozpatrzmy parabolę o równaniu $y = x^2+bx+c$ i prostą o równaniu $y = 0$. Łatwo przekonać się, że są one styczne, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = b^2-4c = 0$. Jest to warunek, którego nie spełnia „prawie każda" (zgodnie z regułami gramatyki należało tu napisać „prawie żadna") parabola. Jeśli na przykład umówimy się, że punkt o współrzędnych b, c na płaszczyźnie reprezentuje parabolę o równaniu $y = x^2+bx+c$, to parabole styczne do naszej prostej $y = 0$ wypełnią krzywą o równaniu $b^2-4c = 0$ (a więc znów parabolę); pozostałe punkty płaszczyzny odpowiadają parabolom przecinającym naszą prostą w dwóch punktach (które?) lub nie przecinających jej w żadnym (które?).
A oto inne uzasadnienie słów „prawie każda", będące równocześnie kluczem do pojęcia „typowości". Równanie paraboli stycznej możemy „zaburzyć", zmieniając dowolnie mało jeden z jej parametrów tak, by nowa parabola przecinała oś x w dwóch punktach lub nie przecinała jej w ogóle. Natomiast parabola przecinająca oś x w dwóch punktach lub nie przecinająca jej wcale znajduje się w „równowadze trwałej": przy dostatecznie małym zaburzeniu współczynników zachowa swoje położenie: oś x nie będzie do niej styczna.
Można to uwidocznić na takim oto obrazku.
Możemy zatem powiedzieć tak: pewna własność jest nietypowa wśród obiektów pewnego zbioru X, gdy dowolnie blisko obiektów mających tę własność leżą obiekty jej pozbawione.
„Typowość" zjawisk zależy więc od tego, jakie obiekty uznamy za bliskie. Powróćmy jeszcze do naszych krzywych. Jeżeli krzywe, przedstawione na rysunku obok uznamy za bliskie, to zjawisko „przecinania krzywej pod danym kątem" nie będzie typowe. Jeżeli jednak będziemy wymagać, by bliskie krzywe miały bliskie lokalne kierunki — powróci sytuacja opisana na początku na przykładzie paraboli i prostej.

Rys. 2

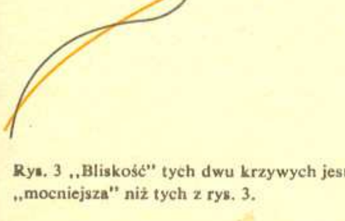
Pojęcia „blisko" i „daleko" będą miały bardziej precyzyjny sens, jeżeli będziemy mieli wzór na mierzenie odległości między krzywymi. Ograniczymy się do krzywych, będących wykresami funkcyj $y = f(x)$ ciągłych i różniczkowalnych na skończonym przedziale I. Nietrudno przekonać się, że jeżeli odległość między krzywymi $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ obliczymy według wzoru

$$\varrho(f_1, f_2) = \sup_{x\in I} |f_1(x)-f_2(x)|,$$

to krzywe przedstawione na rysunkach 2 i 3 będą dość bliskie. Gdy jednak zastosujemy wzór

$$\varrho(f_1, f_2) = \sqrt{\sup |f_1(x)-f_2(x)|^2+\sup |f_1'(x)-f_2'(x)|^2},$$

to krzywe z rysunku 2 będą już dość odległe, zaś te przedstawione na rysunku 3 pozostaną całkiem bliskie.
A oto kilka zjawisk typowych i nietypowych w przestrzeni trójwymiarowej:
Typowa para krzywych jest rozłączna.
Typowe jest przebicie powierzchni przez krzywą pod niezerowym kątem.
Typowa para powierzchni przecina się wzdłuż krzywej.
Typowe przecięcie stożka jest elipsą, parabolą lub hiperbolą.



Rys. 3 „Bliskość" tych dwu krzywych jest „mocniejsza" niż tych z rys. 3.

Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI