Powszechnie uważa się dziś za rzecz naturalną stosowanie matematyki dosłownie wszędzie. Nie zawsze jednak wiemy, na czym owo stosowanie polega, jak i co się robi. Poniższy artykuł prezentuje właśnie typowe użycie matematyki na potrzeby całkowicie niematematycznej gałęzi gospodarki, jaką w tym przypadku jest rolnictwo.

Zastosowania probabilistyki w technice rolniczej

Dr Krzysztof MIKUCKI

W technice jest wiele zjawisk, które można uznać za losowe. W technice rolniczej dochodzi jeszcze jeden „losowy" parametr — pogoda, czy np. ściśle związana z nią długość sezonu agrotechnicznego. Dlatego np. przy planowaniu liczby maszyn rolniczych potrzebnych do wykonania określonego zadania należy wziąć też pod uwagę te losowe wielkości. W dwóch kolejnych artykułach omówimy pokrótce niektóre badania w tym zakresie przeprowadzone w Instytucie Badawczym Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa.

Zajmiemy się wykorzystaniem kombajnów zbożowych. Kombajn taki jest samobieżną maszyną rolniczą, którą można wykorzystać tylko w ściśle określonym okresie (sezonie agrotechnicznym). Długość takiego okresu agrotechnicznego (mierzoną w dniach) traktujemy jako dyskretną zmienną losową. Również efektywna wydajność mierzona w ha/h (hektarach na godzinę) jest zmienną losową. Jest to oczywiście ciągła zmienna losowa. Przyjmujemy, że w ciągu dnia kombajn może pracować określoną liczbę godzin.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

L — długość okresu agrotechnicznego mierzona w dniach,

X — wydajność efektywna mierzona w ha/h,

D — liczba godzin pracy w ciągu dnia,

Y — zadanie do wykonania mierzone w ha.

Ilość pracy mierzonej w ha, którą może wykonać n kombajnów zbożowych w ciągu sezonu agrotechnicznego, można wyrazić za pomocą następującego wzoru

$$Z_n = n \cdot LDX. \tag{1}$$

Przyjęliśmy, że L jest dyskretną zmienną losową, a X zmienną ciągłą. Wobec tego Z_n jest ciągłą zmienną losową. Zakładamy również, że zmienne losowe L oraz X są niezależne. Oznaczmy przez β prawdopodobieństwo, że wystarczy nam maszyn.

Niech N_β oznacza poszukiwaną liczbę kombajnów potrzebnych do wykonania zadania Y. Wielkość N_β określamy w następujący sposób

$$N_\beta = \min\{n \in N\colon P(nLDX > Y) \geqslant \beta\}. \tag{2}$$

Zgodnie z wzorem (2) wielkość N_β jest równa najmniejszej wartości spośród wszystkich wartości n, dla których prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że ilość pracy wykonanej przez n kombajnów jest większa od planowanego zadania Y, równa się co najmniej prawdopodobieństwu β.

Stosowanie wzoru (2) w praktyce wymaga przekształcenia go do innej równoważnej postaci.

Mamy więc

$$P(nLDX > Y) = P\left(LX > \frac{Y}{nD}\right).$$

Niech rozkład zmiennej losowej L ma postać

$$P(L = l_j) = P_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Niech $F_X(x)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X: $F_X(x) = P(X < x)$.

Dystrybuantę zmiennej losowej $U = LX$ wyznaczamy na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym:

Jeżeli zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_r$ wyłączają się parami i wyczerpują zbiór E zdarzeń elementarnych, przy czym $P(A_j) > 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, to dla dowolnego zdarzenia losowego B zachodzi równość

$$P(B) = \sum_{j=1}^{r} P(A_j)P(B \mid A_j).$$

Wobec tego $F_U(u) = P(U < u) = P(LX < u) =$

$$= \sum_{j=1}^{r} P(L = l_j)P(LX < u \mid L = l_j),$$

z kolei $P(LX < u \mid L = l_j) = P(l_jX < u) = P\left(X < \frac{u}{l_j}\right) = F_X\left(\frac{u}{l_j}\right)$,

ostatecznie więc

$$F_U(u) = \sum_{j=1}^{r} p_j F_X\left(\frac{u}{l_j}\right). \tag{3}$$

A więc wzór (2) możemy zapisać w następującej postaci równoważnej

$$N_\beta = \min\left\{n \in N\colon \sum_{j=1}^{r} p_j F_X\left(\frac{Y}{nl_jD}\right) \leqslant 1 - \beta\right\}. \tag{4}$$

Formułę (4) zaprogramowano w języku FORTRAN na komputerze ODRA 1305. Obliczenia przeprowadzono dla następującego przykładu:

Na podstawie wyników eksploatacyjnych badań kombajnów zbożowych KZS-5 wykazano metodami statystyki-matematycznej, że wydajność efektywna X w ha/h ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0,72 i odchyleniu standardowym 0,17. Dla długości okresu agrotechnicznego L przyjęto funkcję prawdopodobieństwa podaną w tabeli 1. Ponadto przyjęto $D = 8$ h.

W wyniku obliczeń na komputerze otrzymano następujące wyniki (Tabela 2)

Tabela 1. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej L

l_j	17	18	19	20
p_j	0,10	0,40	0,40	0,10

Tabela 2. Liczba potrzebnych kombajnów N_β

Y \ β	0,60	0,70	0,80	0,90
500	5	6	6	7
1000	10	11	12	14
1500	15	17	18	21
2000	20	22	24	28
2500	25	27	30	34
3000	30	33	36	41