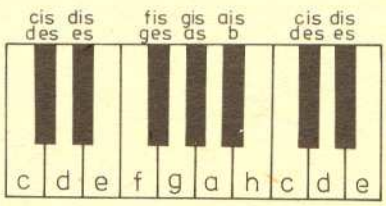
Historia systemów dźwiękowych

Dr Krzysztof DĄBROWSKI

W tym artykule omówimy pewne matematyczne (a dokładniej, rachunkowe) metody wyznaczania i porządkowania zbioru wszystkich wysokości dźwięków, używanych w muzyce europejskiego kręgu kulturowego.
Początki muzyki sięgają początków istnienia człowieka.
W praktyce muzycznej używano zarówno głosu ludzkiego, jak i przedmiotów, wydających dźwięki o określonej lub nieokreślonej wysokości. Takie przedmioty wydawały zwykle jeden dźwięk — były to różnego rodzaju gwizdki, zwierzęce rogi, cięciwy łuków, prymitywne instrumenty perkusyjne. Z czasem zaczęto budować instrumenty, wydające więcej dźwięków — w gwizdku wywiercono otworki i powstała fujarka, długość cięciwy łuku skracano palcami itp. Początkowo zbiór dźwięków, wydawanych przez takie instrumenty, był dosyć przypadkowy — dziurki w piszczałce wiercono w tych miejscach, w których jej dotykały swobodnie położone palce (tzn. nie tam ustawiano palce, gdzie były dziurki, tylko tam wiercono dziurki, gdzie były palce), cięciwę skracano w miejscach zupełnie dowolnych. W miarę rozwoju muzyki zaczęto zauważać potrzebę ujednolicenia wysokości dźwięków, uzyskiwanych z różnych instrumentów, pojawił się więc problem, jak dokładnie wyznaczyć wszystkie używane wysokości dźwięków, czyli system dźwiękowy.
Pierwsze badania stosunków długości strun i piszczałek przeprowadzano w czasach wczesnohistorycznych, jednak miały one charakter wycinkowy i niedokładny. Badaczem, który stworzył pierwsze dokładne podstawy teoretycznego wyznaczania wysokości dźwięków, był Pitagoras (VI w. p.n.e.).
Do omówienia jego systemu (i następnych) będą potrzebne używane w muzyce nazwy odległości dźwięków, tzw. interwały. (Przez odległość dźwięków należy rozumieć stosunek ich częstotliwości — dlaczego nie różnicę, wyjaśnimy później). Podajemy też dla przykładu nazwę dźwięku odległego od dźwięku *c* o dany interwał.



Liczba półtonów między dźwiękami	nazwa interwału	dźwięk odległy o ten interwał od dźwięku *c*
0	pryma	*c*
1	sekunda mała	*cis, des*
2	sekunda wielka	*d*
3	tercja mała	*dis, es*
4	tercja wielka	*e*
5	kwarta	*f*
6	tryton	*fis, ges*
7	kwinta	*g*
8	seksta mała	*gis, as*
9	seksta wielka	*a*
10	septyma mała	*ais, b*
11	septyma wielka	*h*
12	oktawa	*c*

Dodajmy, że tryton jest nazywany też kwartą zwiększoną, lub kwintą zmniejszoną (zależnie od zapisu), zaś nazwa „oktawa" oznacza nie tylko odległość dwóch sąsiednich dźwięków o tej samej nazwie, ale też zbiór wszystkich wysokości dźwięków pomiędzy dwoma sąsiednimi dźwiękami *c*. Poszczególne oktawy (w drugim znaczeniu) mają swoje nazwy, których nie będziemy tu podawać.
Doświadczenia Pitagorasa polegały na podziale struny na części przy pomocy przesuwanej podpórki. Była ona ustawiana w odległości 1/2, 1/3 i 1/4 długości struny od jednego z jej punktów zaczepienia. To doprowadziło do wyznaczenia następujących interwałów:

KĄCIK ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI

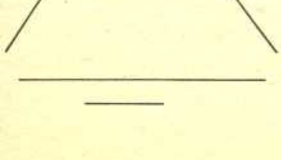
SECRETARIAL

READY TO MOVE INTO THE FUTURE ?

Tak zatytułowane (od biedy można to przetłumaczyć *Gotów do kroku w przyszłość?*) duże ogłoszenie w angielskim The Times z 4 marca 1980 roku donosi: Szukamy młodej sekretarki w wieku 18 - 22 lat, która poważnie patrzy w przyszłość. Niezależnie od zwykłych obowiązków sekretarskich, nauczymy cię posługiwać się końcówką komputera. Nasze wymagania są wysokie. Musisz mieć 5 ocen bardzo dobrych (przede wszystkim angielski i matematyka) i pisać na maszynie co najmniej 50 słów na minutę. Płacimy 3,750 rocznie etc. ...

Gdy zapytano Pitagorasa: ,,Co to jest przyjaciel?" — odpowiedział ,,Przyjaciel to drugi ja; przyjaźń to stosunek liczb 220 i 284" (tak przynajmniej twierdzi Szczepan Jeleński w książce ,,*Śladami Pitagorasa*"). Polega to na tym, że suma dzielników 220 jest równa 284 i odwrotnie, suma dzielników liczby 284 jest równa 220. Liczby o tej własności nazywane są zaprzyjaźnionymi; pierwsze z nich to 220 i 284.
Początkowe 17 liczb pierwszych to
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.
Ich suma wynosi $2 \cdot 220$.
Suma ich kwadratów $= 59 \cdot 284$.
(Elvin J. Lee, *Journ. Recr. Math.* 12 (1980))

Rozwiązanie zadania M 262.
Rozpatrzmy 6 odcinków rozmieszczonych tak, jak na rysunku. Łatwo zauważyć, że koniec odcinka ,,zewnętrznego" może być połączony tylko z końcem odpowiedniego odcinka ,,wewnętrznego". Ponieważ jednak co najmniej jeden z odcinków zewnętrznych musi mieć oba końce połączone z innymi punktami, łamana musiałaby zawierać czworokąt, co jest niemożliwe.



stosunek długości drgających części struny	interwał	stosunek częstotliwości
1 : 2	oktawa	2 : 1
2 : 3	kwinta	3 : 2
3 : 4	kwarta	4 : 3

Stosunki częstotliwości odpowiednich dźwięków są odwróceniem stosunków długości części struny.
Pitagoras uważał, że nie ma potrzeby dalej dzielić struny, ponieważ przez dodawanie i odejmowanie już otrzymanych interwałów można otrzymać wszystkie inne. Miało to polegać na mnożeniu lub dzieleniu wyjściowej częstotliwości przez otrzymane współczynniki, równe stosunkom odpowiednich częstotliwości.
Dla przykładu obliczmy współczynnik dla tercji wielkiej:

c	g	d^1	a^1	e^2	e^1	e
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{81}{64}$

Najpierw wyjściową częstotliwość mnożyliśmy przez 3/2 dla przesunięcia o kwintę w górę, potem dzieliliśmy przez 2 (= 2/1) dla przesunięcia do wyjściowej oktawy. Cyferki przy literach oznaczają liczbę oktaw, o które jest wyższy dany dźwięk od dźwięku oznaczanego tą samą literą, ale bez cyferki.
W systemie Pitagorasa wszystkie całe tony (czyli sekundy wielkie) miały współczynnik 9/8. Były w nim dwa rodzaje półtonów: 256/243 i 2187/2048, z których żaden nie odpowiadał połowie całego tonu. To prowadziło do tego, że gdy dźwięk podwyższyliśmy o pół tonu, to dostaliśmy inny dźwięk, niż wtedy, gdy obniżyliśmy o pół tonu dźwięk, leżący o cały ton wyżej, więc np. *cis* było wyższe od *des*. Tę różnicę odległości całego tonu i dwóch jednakowych półtonów nazywa się ,,komatem pitagorejskim". Pitagoras uporządkował wszystkie interwały pod względem zgodności brzmienia dźwięków odległych o dany interwał (tzn. konsonansowości tego interwału), mianowicie interwał był bardziej konsonansowy, jeżeli był określony przez stosunek mniejszych liczb (tak przynajmniej uważał Pitagoras).
W średniowieczu, gdy powstała muzyka wielogłosowa, zauważono, że teoria Pitagorasa jest niezgodna z praktyką, ponieważ o wiele lepiej brzmiały dwa głosy prowadzone w odległości tercji (wielkiej lub małej), niż np. sekundy, podczas gdy, zgodnie z systemem Pitagorasa, sekunda była bardziej konsonansowa od tercji (np. tercja wielka miała, jak wiemy, współczynnik 81/64, a sekunda wielka miała współczynnik 9/8, więc różnica była dość znaczna). Stało się więc konieczne stworzenie nowego systemu, usuwającego tę niezgodność.
Dokonało się to w XIV w. Angielski teoretyk, Walter Odington, odnalazł prace filozofa greckiego Didymosa (I. w. p.n.e.), który kontynuował badania Pitagorasa, posuwając je o krok dalej, mianowicie zastosował podział struny w 1/5 jej długości. W ten sposób otrzymał tercję wielką, określoną stosunkiem 5/4, a więc nieco mniejszą od pitagorejskiej. Różnica tych dwóch tercji nosi nazwę ,,komatu syntonicznego", lub ,,didymejskiego". Wprowadzenie nowego interwału uzasadniło konsonansowość tercji wielkiej i dało teoretyczne podstawy tworzenia muzyki wielogłosowej w oparciu o tercje.
Teraz interwały można było obliczać, stosując mnożenie, lub dzielenie nie tylko przez współczynnik 3/2 (lub 4/3, który w połączeniu ze współczynnikiem 2/1 daje ten sam rezultat), lecz również przez 5/4, co w przypadku wielu interwałów zmniejszyło liczby, tworzące ich współczynniki. Na podstawie takich obliczeń powstał tzw. ,,system naturalny", utworzony z czterech dźwięków pitagorejskich — *f*, *c*, *g*, *d* — oraz z dźwięków odległych od nich o tercję wielką w górę i w dół, co dało wszystkich dwanaście dźwięków oktawy. Dla przykładu, współczynniki dźwięków gamy *C* dur były następujące:

c	d	e	f	g	a	h	c^1
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Jak widać, w systemie naturalnym były dwa rodzaje całych tonów, np. między *c* i *d* był cały ton o współczynniku 9/8, zaś między *d* i *e* — o współczynniku 10/9, więc trochę mniejszy. To powodowało, że gdybyśmy chcieli zbudować system naturalny np. od dźwięku *d*, zamiast c, wtedy otrzymany system nie pokryłby się z systemem wyjściowym. Podobnie, jak w systemie pitagorejskim, dwa półtony nie dawały całego tonu, jednak tutaj — inaczej niż w poprzednim systemie — *cis* było niższe od *des*. Ta różnica była równa komatowi syntonicznemu.
Praktyczną konsekwencją było to, że w tym systemie można było grać tylko w niektórych tonacjach, ponieważ nie wszystkie akordy brzmiały czysto.

Rozwiązanie zadania M 265.

Niech $f_1(x) = x^3 - x + 1$ i $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ dla $n \geq 2$. Mamy $f_n(0) = f_{n-1}(1) = f_1(1) = 1$ i wobec tego wyrazem wolnym f_n jest 1. Wynika stąd, że dla każdego całkowitego $a > 1$ liczba $f_n(a)$ daje przy dzieleniu przez a resztę 1. W szczególności

$$f_k(m) = f_{k-l}(f_l(m)) \equiv 1 \pmod{f_l(m)},$$

a więc $f_k(m)$ i $f_l(m)$ są względnie pierwsze.

Kącik Czytelniczy

— Po prostu chcemy szybko dorobić się majątku. Mamy nawet makietę maszyny matematycznej. Mówimy wszystkim, że to taka zabawka ze światełkami, które zapalają się i gasną, ale nikt nam nie chce uwierzyć.

(Cosmo Saltana w powieści J. B. Priestleya *„Londyn"*)

Ta sytuacja zaczęła przeszkadzać w baroku, gdy zaczęto komponować utwory, wykorzystujące przejścia od jednej tonacji do drugiej, tzw. modulacje (wtedy zresztą powstało samo pojęcie tonacji). W związku z tym należało znaleźć jeszcze inny system, który by umożliwił modulacje. Chodziło o to, żeby po zbudowaniu takiego systemu od różnych dźwięków otrzymać, przynajmniej w przybliżeniu, jednakowe wyniki. Stworzono wiele systemów tego typu. Omówimy tu tylko najważniejszy z nich, nazywany „systemem równomiernie temperowanym", który jest wykorzystywany do czasów obecnych. Stworzył go J. G. Neidhardt w roku 1706. Punktem wyjścia dla jego systemu było to, że odległość dwunastu kwint różniła się od odległości siedmiu oktaw o komat pitagorejski:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \approx \frac{129{,}746}{128} \approx 1{,}014.$$

Neidhardt odległość tę podzielił przez 12 i interwał kwinty zmniejszył o otrzymany wynik. Skutkiem tego było to, że teraz dwanaście kwint było równe siedmiu oktawom, dwa półtony odpowiadały całemu tonowi i system, zbudowany od dowolnego innego dźwięku, niż *c*, dawał dokładnie system wyjściowy, można więc było modulować do dowolnej tonacji.

Najdonioślejszym zastosowaniem nowego systemu było stworzenie przez Jana Sebastiana Bacha w 1772 r. pierwszego z dwóch tomów zbioru „Das wohltemperierte Klavier", zawierającego 24 preludia i fugi we wszystkich tonacjach durowych i molowych.
W związku z powstaniem nowego systemu dźwiękowego, należało zmienić sposób wyrażania interwałów współczynnikami liczbowymi. Teraz już bardzo niewygodne było stosowanie ułamków zwykłych, lepiej było je zamienić na ułamki dziesiętne.

Obok tego sposobu istnieje również inny, wygodniejszy, wykorzystujący prawo Webera-Fechnera, mówiące, że wszystkie zmysły człowieka reagują „w skali logarytmicznej" — wrażenie, wywołane przez bodziec, jest proporcjonalne nie do natężenia tego bodźca, lecz do logarytmu z jego natężenia. Znalazło to zastosowanie w określaniu jasności gwiazd przez tzw. „wielkości gwiazdowe", jak również w wyrażaniu głośności przy pomocy decybeli. W naszej sytuacji ma miejsce podobne zjawisko — wrażenie, wywołane w mózgu człowieka przez dźwięk, nie jest proporcjonalne do jego częstotliwości, tylko do logarytmu z jego częstotliwości. Dlatego zmiany częstotliwości w stałym stosunku człowiek odbiera jako zmiany o stałą odległość. Dźwięki odległe od siebie o całkowitą liczbę oktaw, tzn. takie, których częstotliwości pozostają w stosunku całkowitoliczbowym, są bardzo podobne pod względem brzmienia, dlatego są oznaczane tą samą literą.

W związku z tym, wprowadzono odległość milioktawy (oznaczenie mO), będącej tysięczną częścią oktawy, tzn. dodanie jednej milioktawy do danej wysokości oznacza pomnożenie częstotliwości o $\sqrt[1000]{2}$ czyli ok. 1,00069. Dla wyrażenia wielkości interwału w milioktawach należy obliczyć logarytm przy podstawie 2 z jego współczynnika liczbowego i wynik pomnożyć przez 1000. W wyniku zastosowania logarytmów mnożenie zmienia się na dodawanie, a dzielenie na odejmowanie, co ułatwia obliczanie interwałów. Podstawa 2 została przyjęta ze względu na podobieństwo dźwięków odległych o oktawę, a więc o częstotliwościach różniących się dwukrotnie.

Istnieje też inna jednostka — cent (w skrócie ct), będąca tysiąc dwusetną częścią oktawy. Została ona wprowadzona z tego względu, że oktawę dzieli się na 12 półtonów, więc wygodnie by było wiedzieć, jak się ma dany interwał do półtonu temperowanego, równego 100 ct i odpowiadającego współczynnikowi $\sqrt[12]{2}$.

Wprowadzone jednostki są bardzo wygodne przy porównywaniu interwałów. Np. dla obliczenia wielkości kwinty temperowanej należy, zgodnie z tym, co było napisane, odległość siedmiu oktaw, tzn. 7000 mO, podzielić na 12 części, a więc kwinta temperowana ma wielkość 583 mO. Dla porównania, kwinta naturalna ma wielkość 585 mO. Te same interwały po wyrażeniu w centach mają wielkości odpowiednio 700 ct i 702 ct.

* * *

Mogłoby się wydawać, że od tego trzeba było zacząć — jeżeli chcemy mieć system dźwiękowy jednakowy z punktu widzenia każdego składowego dźwięku, trzeba podzielić oktawę równo na 12 półtonów. Jednak przyjęta na początku droga miała swoje racje — interwały, powstałe przez podział struny na części, odpowiadające odwrotnościom liczb całkowitych, są na pewno naturalniejsze, niż interwały temperowane. Te drugie zostały sztucznie stworzone przez człowieka na drodze obliczeń, natomiast te pierwsze są stworzone przez przyrodę — powstają same przez samorzutny podział struny na pewną ilość części, co zawsze ma miejsce podczas drgania — struna nigdy nie drga całą swoją długością.

W związku z tym prowadzono (i prowadzi się nadal) poszukiwania systemów, dzielących oktawę na inną ilość równych części, niż 12, w nadziei, że się uda w ten sposób pogodzić temperację z bardziej naturalnym brzmieniem interwałów. Nic jednak na razie nie wskazuje na to, że te systemy znajdą w najbliższej przyszłości szersze zastosowanie.