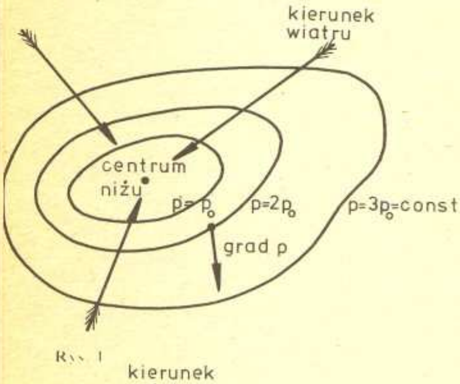
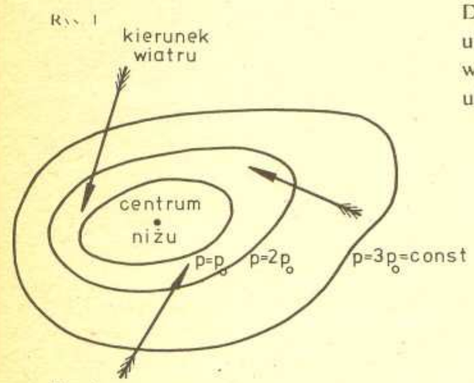
Dlaczego wiatr nie wieje w kierunku centrum niżu barometrycznego?

Mgr Jerzy DAŁEK

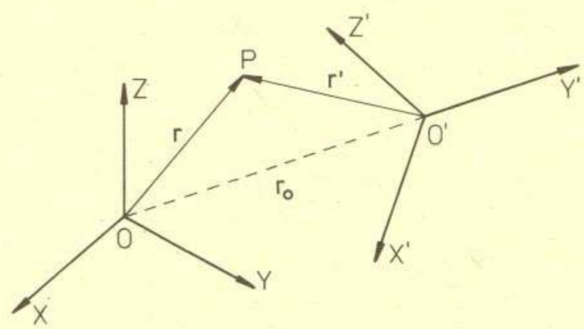


Rys. 1



Rys. 2

Każdego wieczoru, na zakończenie dziennika telewizyjnego, podawana jest prognoza pogody. Możemy obejrzeć mapę Europy z naniesionymi wyżami i niżami barometrycznymi. Linie widoczne na mapie to izobary — linie stałego ciśnienia. Niże (zwane też cyklonami) to obszary w których ciśnienie jest obniżone w stosunku do otoczenia, podczas gdy wyże (zwane antycyklonami) to obszary o ciśnieniu podwyższonym. Wydawałoby się, że w obszarze niżu powinny wiać wiatry w kierunku jego centrum. Dlaczego? Oczywiście, dlatego, że masy powietrza powinny przesuwać się w kierunku najniższego ciśnienia. Używając języka matematycznego mówimy, że gradient ciśnienia, czyli wektor skierowany prostopadle do izobar i mający zwrot w kierunku rosnącego ciśnienia, pokazuje kierunek przeciwny do kierunku, w którym powinien wiać wiatr (rys. 1). Kiedy spojrzymy jednak na mapę pogody, to okaże się, że wiatr nie wieje dokładnie w kierunku centrum niżu, tylko wykazuje tendencję do skręcania w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 2). Zajmiemy się wyjaśnieniem tego zjawiska.
Do wyjaśnienia zjawiska konieczne będzie nieco rozważań teoretycznych. Rozpatrzmy dwa układy współrzędnych poruszające się względem siebie. Zastanówmy się, jaki jest związek między wielkościami opisującymi ruch w obu tych układach współrzędnych. Oznaczmy jeden z układów współrzędnych przez $Oxyz$ a drugi przez $O'x'y'z'$ (rys. 3).



Rys. 3

Ruch drugiego układu względem pierwszego jest scharakteryzowany dwiema wielkościami: prędkością v_{tr} (zwaną prędkością translacyjną), z jaką porusza się początek układu O' względem początku układu O oraz prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, z jaką obraca się układ $O'x'y'z'$ względem układu $Oxyz$. Weźmy punkt P, którego położenie w układzie $Oxyz$ określa wektor $OP = \boldsymbol{r}$. Prędkość $\boldsymbol{v}$ punktu P względem układu $Oxyz$ równa się sumie prędkości $\boldsymbol{v}'$ punktu P względem układu $O'x'y'z'$ i prędkości $\boldsymbol{v}_0$ zwanej prędkością unoszenia punktu nieruchomego w układzie $O'x'y'z'$ względem układu $Oxyz$.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0. \tag{1}$$

Z kolei prędkość $\boldsymbol{v}_0$ można przedstawić jako sumę prędkości translacyjnej i rotacyjnej

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_{tr} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'. \tag{2}$$

Prędkość rotacyjna $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ jest prędkością liniową odpowiadającą prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$, ($\boldsymbol{r}' = O'P$). Rozkład prędkości unoszenia na część translacyjną i rotacyjną wynika ze znanego z geometrii twierdzenia, że każdą izometrię (zachowującą orientację) można przedstawić jako złożenie dwóch przekształceń — przesunięcia równoległego i obrotu. Ostatecznie, podstawiając (2) do (1) otrzymamy wzór na prędkość w układzie $Oxyz$ w zależności od prędkości względem układu $O'x'y'z'$, prędkości translacyjnej i prędkości kątowej w postaci

$$\underbrace{\boldsymbol{v}}_{\substack{\text{prędkość}\\ \text{w układzie}\\ Oxyz}} = \underbrace{\boldsymbol{v}'}_{\substack{\text{prędkość}\\ \text{w układzie}\\ O'x'y'z'}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_{tr}}_{\substack{\text{prędkość}\\ \text{translacyjna}}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'}_{\substack{\text{prędkość}\\ \text{rotacyjna}}} \tag{3}$$

Zgodnie z definicją, przyspieszenie punktu poruszającego się z prędkością $\boldsymbol{v}$ jest pochodną tej prędkości względem czasu: $a = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Różniczkując (3) otrzymamy:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'),$$

Symbol $\omega \times r$ oznacza iloczyn wektorowy ω przez r. Ogólnie, iloczynem wektorowym dwu wektorów swobodnych α i β nazywamy wektor prostopadły do nich obydwu, mający długość taką, ile wynosi pole równoległoboku o bokach α i β, oraz skierowany tak, że trójka α, β, $\alpha \times \beta$ jest dodatnio zorientowana (prawoskrętna). Gdy $\alpha = [a_1, a_2, a_3]$, $\beta = [b_1, b_2, b_3]$ to $\alpha \times \beta = [a_2b_3 - a_3b_2, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$. Jeżeli współrzędne wektorów α i β zależą w sposób różniczkowalny od zmiennej t, to jest tak i dla wektora $\alpha \times \beta$. Mamy ponadto

$$\frac{d}{dt}(\alpha \times \beta) = \left(\frac{d}{dt}\alpha\right) \times \beta + \alpha \times \left(\frac{d}{dt}\beta\right).$$

Czytelnik, który chciałby dokładnie prześledzić wyprowadzenie wzoru (4), może zajrzeć np. do podręcznika W. Rubinowicza i W. Królikowskiego „Mechanika teoretyczna", PWN, 1964, lub — do czego zachęcam — wyprowadzić wzór samemu, korzystając z następujących wskazówek. Związek między pochodną dowolnego wektora b w układzie $Oxyz$ i $O'x'y'z'$, wynikający z wzoru (3), ma postać $\dfrac{db}{dt} = \dfrac{d'b}{dt} + \omega \times b$.

Oczywiście $\dfrac{d'}{dt}$ oznacza różniczkowanie w układzie $O'x'y'z'$.

Rozwiązanie zadania **M 264.**
Powiemy, że wielomiany o współczynnikach całkowitych $f(x)$ i $g(x)$ przystają modulo p, piszemy $f(x) \overset{p}{\equiv} g(x)$, gdy wszystkie współczynniki $f-g$ dzielą się przez p.
Można sprawdzić, że jeżeli $f \overset{p}{\equiv} f_1$ i $g \overset{p}{\equiv} g_1$, to $fg \overset{p}{\equiv} f_1g_1$ oraz że dla p będącego liczbą pierwszą $(x+1)^p \overset{p}{\equiv} x^p+1$.
Niech teraz $n = k \cdot p + r$, gdzie $k = \left[\frac{n}{p}\right]$.
Mamy:

$$x^n + \ldots + \binom{n}{p}x^p + \ldots + 1 = (x+1)^n =$$
$$= (x+1)^{kp} \cdot (x+1)^l = ((x+1)^p)^k(x+1)^l$$
$$\overset{p}{\equiv} (x^p+1)^k(x+1)^l = \left(x^{pk} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{k}{k-1}x^p + 1\right)(x+1)^l.$$

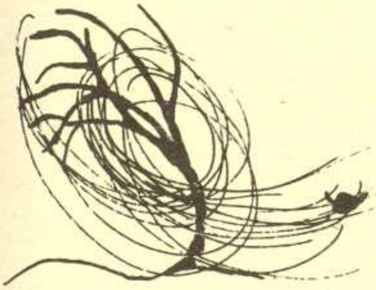
Jedynym składnikiem stopnia p w tym iloczynie jest
$\binom{k}{k-1}x^p \cdot 1 = kx^p$ i z definicji przystawania modulo p mamy

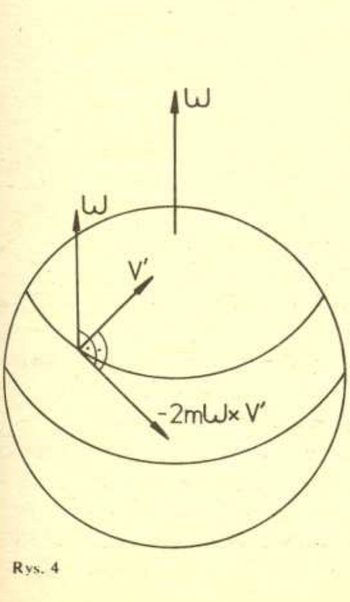
$$p \mid \binom{n}{p} - k = \binom{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right].$$

Uwaga: Można na tej drodze wykazać, że gdy

$$n = n_0 + pn_1 + p^2n_2 + \ldots + p^mn_m$$
$$\text{i } k = k_0 + pk_1 + \ldots + p^mk_m,$$

to $$p \mid \binom{n}{k} - \binom{n_m}{k_m} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0}.$$





Rys. 4

czyli

(4)
$$\underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{w układzie}\\ Oxyz}}{a} = \underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{względne}\\ \text{w układzie}\\ O'x'y'z'}}{a'} + \underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{translacyjne}}}{a_{tr}} + \underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{powstające od}\\ \text{przyspieszenia}\\ \text{kątowego}}}{\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'} + \underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{Coriolisa}}}{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'} + \underset{\substack{\text{przyspieszenie}\\ \text{dośrodkowe}}}{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}.$$

Omówimy sens fizyczny wzoru (4). Stwierdza on, że przyspieszenie $\boldsymbol{a}$ w układzie $Oxyz$ składa się z przyspieszenia względnego $\boldsymbol{a}'$ względem układu $O'x'y'z'$ oraz dodatkowego przyspieszenia złożonego z czterech składników. Pierwszy z nich $\boldsymbol{a}_{tr}$, to przyspieszenie względem układu $Oxyz$, jakiego doznaje punkt wskutek zmiany prędkości translacyjnej $\boldsymbol{v}_{tr}$ układu $O'x'y'z'$ względem układu $Oxyz$. Pozostałe składniki, związane z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, mogą być różne od zera tylko wówczas, gdy $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, czyli jeśli układ $O'x'y'z'$ obraca się względem układu $Oxyz$. Składnik $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'$ przedstawia przyspieszenie punktu w układzie $O'x'y'z'$ powstające dzięki przyspieszeniu kątowemu $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ układu $O'x'y'z'$ względem układu $Oxyz$. Oczywiście, składnik ten jest równy 0, gdy prędkość kątowa jest stała w czasie. Składnik $2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ nazwany jest przyspieszeniem Coriolisa. Przyspieszenie Coriolisa działa na ciało jedynie wówczas, gdy porusza się ono w układzie $O'x'y'z'$, tzn. gdy $\boldsymbol{v}' \neq 0$ oraz gdy prędkość nie jest skierowana wzdłuż osi obrotu równoległej do wektora $\boldsymbol{\omega}$ (wiadomo bowiem, że iloczyn wektorowy wektorów równoległych jest wektorem zerowym). Wreszcie ostatni człon wzoru (4) $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ to przyspieszenie dośrodkowe, zwane tak dlatego, że skierowane jest do osi obrotu.

Rozpatrzmy teraz masę powietrza poruszającego się w kierunku centrum niżu. Ziemia obraca się wokół osi ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Przyjmijmy układ współrzędnych $Oxyz$, nieruchomy w stosunku do gwiazd, o początku w środku Ziemi. Układ $O'x'y'z'$ będzie związany z obracającą się wokół osi Ziemią, a więc będzie się poruszał ruchem obrotowym w stosunku do układu $Oxyz$, z prędkością obrotu Ziemi. W rozważaniach zaniedbujemy ruch Ziemi wokół Słońca. Mamy więc w istocie sytuację opisaną teoretycznie powyżej. Przyspieszenie masy powietrza w układzie $Oxyz$ wyraża się wzorem (4), przy czym, dzięki poczynionym założeniom, wzór (4) przyjmie prostszą postać

(5) $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'),$$

ponieważ $\boldsymbol{a}_{tr} = 0$, gdyż układy $Oxyz$ i $O'x'y'z'$ nie przesuwają się względem siebie, oraz $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$, gdyż $\boldsymbol{\omega}$ nie zależy od czasu. Zbadajmy, jakie siły działają na rozpatrywaną masę powietrza. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siła jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia: $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$. Wstawiając do powyższego wzoru $\boldsymbol{a}$ z (5) otrzymamy

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').$$

Człon $-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ nazywa się siłą Coriolisa, zaś człon $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ siłą odśrodkową. Są to „dodatkowe" siły, które pojawiają się w układzie poruszającym się $O'x'y'z'$. Pierwsza z nich — siła Coriolisa — będzie powodowała odchylanie kierunku wiatru. Zobaczymy, jaki będzie jej kierunek. Gdy znajdujemy się na półkuli północnej, to zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej, określającej zwrot iloczynu wektorowego, na masę powietrza poruszającego się z prędkością $\boldsymbol{v}'$ działa siła skręcająca tę masę w prawo (rys. 4). Daje to odpowiedź na pytanie postawione w tytule, a zarazem stanowi treść reguły Buys-Ballota, która mówi, że na półkuli północnej niż barometryczny znajduje się po lewej stronie obserwatora zwróconego plecami do wiatru. Czytelnik łatwo może sprawdzić, że na półkuli południowej sytuacja odwraca się — niż znajduje się po prawej stronie obserwatora.

Siła Coriolisa daje o sobie znać nie tylko w przypadku wiatrów w obszarach niżu barometrycznego. Jej działaniu podlegają pasaty i antypasaty, a także prądy morskie. Chciałbym zwrócić uwagę na wiele upraszczających założeń, które po kolei wprowadzaliśmy, aby móc znaleźć odpowiedź na postawione pytanie. Nie o wszystkich jednak założeniach mówiliśmy jawnie w tekście. Najważniejszym z tych nie wymienionych założeń jest chyba to, że równania opisujące ruch punktu materialnego stosowane były do opisu ruchu mas powietrza. Jest to założenie dość grube, jednak upraszcza ono znacznie rozważania i daje „przyzwoity" zgodny z obserwacjami meteorologicznymi — wynik jakościowy. Całe nasze rozumowanie opierało się na matematycznym opisie zjawiska fizycznego. Taki sposób postępowania jest powszechnie stosowany w naukach przyrodniczych — tworzenie modelu fizycznego zjawiska, jego opis matematyczny, dyskusja otrzymanych z tego modelu wyników i ich porównanie z doświadczeniem.