Co to jest dowód?

Co to znaczy *udowodnić twierdzenie matematyczne*? Logicy dawno już odpowiedzieli na to pytanie, podając definicję *dowodu formalnego* jako ciągu zdań kończącego się dowodzonym twierdzeniem i o tej własności, że następne zdanie ciągu powstaje z poprzedniego w myśl prostych, ustalonych reguł.
Początkiem ciągu muszą zaś być aksjomaty.
No tak, to wszystko pięknie, tylko że takich dowodów nikt nie pisze. Byłyby za długie, niezrozumiałe przez szczegółowość, a nade wszystko ... piekielnie nudne. Powstające w rzeczywistości dowody matematyczne to jakby szkice rozumowań, opisy, jak coś tam można udowodnić. Autorzy pomijają wiele kroków, pozostawiając je domyślności czytelników, co czasem prowadzi do złych skutków, gdy ci są mniej domyślni niż to zakładali twórcy dowodów. Na ogół jednak przyjmuje się za „dobry" dowód, który jest zrozumiały dla tzw. przeciętnie wykształconego specjalisty.
Przy takim, bardzo pragmatycznym podejściu do pojęcia dowodu budzi się od razu szereg wątpliwości. Czy np. rozumowanie spisane na 10 tysiącach stron druku można nazwać dowodem? Żaden człowiek nie byłby w stanie tego zrozumieć, zakładając nawet, że taki gigant zostałby wydrukowany. Podobne kontrowersje budzi dowód słynnego twierdzenia o czterech barwach. Większą część tekstu stanowi tam wydruk z komputera tak długi, że nikt nie jest w stanie sprawdzić poprawności obliczeń bez użycia ... innego komputera. A jeśli maszyna popełniła błąd? Poza tym dla kogo robimy dowody: dla ludzi, czy dla komputerów?
Wśród matematyków istnieje zwyczaj wyznaczania nagród za rozwiązanie szczególnie trudnych problemów. Stawia się wówczas na ogół pytanie: „czy jest tak a tak?" i wypłaca okrągłą sumę temu, kto odpowie na nie twierdząco lub przecząco i poda dowód. Słynnym fundatorem takich nagród i jednocześnie twórcą problemów jest węgierski matematyk Pál Erdös, a premie sięgają niekiedy trzech tysięcy dolarów. Zdarza się czasem, zwłaszcza przy pytaniach z teorii mnogości, topologii ogólnej czy teorii funkcji rzeczywistych, że jakiś niesforny matematyk wykręci się sianem i zamiast odpowiedzieć *tak* lub *nie*, udowodni, że dana hipoteza jest nierozstrzygalna, tzn. nie można jej ani udowodnić, ani obalić. Z formalnego punktu widzenia wszystko jest w porządku, problem zostaje zamknięty. W odczuciu jednak niektórych matematyków dowód niezależności hipotezy daje mniej informacji niż „zwykły" dowód jej lub jej zaprzeczenia. Czy autor takiego rozwiązania powinien zainkasować nagrodę w walucie wymienialnej? Zdania co do tego są podzielone, zwłaszcza że warunki konkursu nie bywają ustalane precyzyjnie. A co o tym sądzą Czytelnicy?

Andrzej PELC

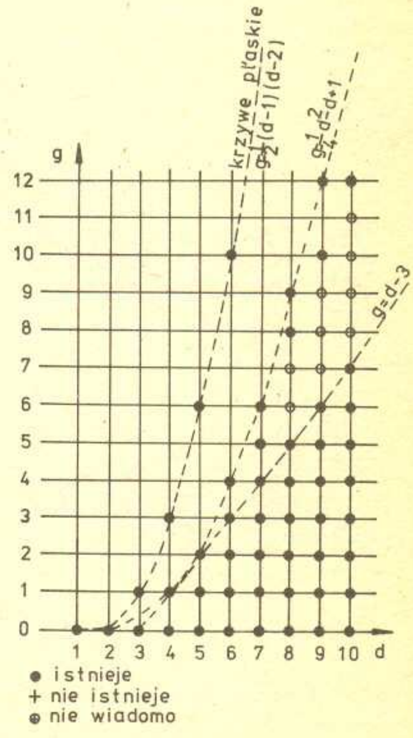
Stopień i rodzaj powierzchni

Chociaż równanie takie jak $x^5+19x^3y-4y^{23}-x+1 = 0$ wygląda na bardzo skomplikowane, z jednym faktem można się zgodzić od razu — opisuje ono pewną krzywą na płaszczyźnie. Ta krzywa jest *algebraiczna* — bo po lewej stronie równania stoi wielomian.
Powierzchnie algebraiczne można opisywać różnie, a jednym ze sposobów jest rozpatrywanie równań z niewiadomymi zespolonymi. Równanie takie jak $z_1^5+19z_1^3z_2-4z_2^{23}-z_1+1 = 0$ (gdzie rozwiązań z_1 i z_2 szukamy wśród liczb zespolonych) stanowi w gruncie rzeczy parę równań: część rzeczywista $= 0$ oraz część urojona $= 0$. W równaniach tych mamy ukryte cztery zmienne rzeczywiste: części rzeczywiste z_1 i z_2 oraz ich części urojone. A zatem równanie takie opisuje twór $4-2 = 2$-wymiarowy, tj. powierzchnię.
Powierzchnię opisaną przez przyrównanie do zera pewnego wielomianu zespolonego nazywamy powierzchnią algebraiczną w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej.
W trójwymiarowej przestrzeni zespolonej do opisania powierzchni potrzeba już dwóch zespolonych równań wielomianowych (= czterech rzeczywistych).
Powierzchnie możemy sobie jako-tako wyobrażać, a zagadnienie ich topologicznej klasyfikacji jest od dawna rozstrzygnięte.
Każda z interesujących nas tu powierzchni algebraicznych jest homeomorficzna ze sferą (powierzchnią kuli), do której
a) doklejono pewną liczbę rączek-uch
b) usunięto pewną liczbę izolowanych punktów
c) sklejono ze sobą kilka (-naście, -dziesiąt, -set ...) innych punktów.
Liczba owych „rączek" z punktu *a*) to *rodzaj* powierzchni (Delta 1/1981). Jest to jej niezmiennik topologiczny. Podstawowym zaś geometrycznym niezmiennikiem jest *stopień*. Dla powierzchni opisanej jednym równaniem zespolonym jest to po prostu stopień tego równania, ale można podać bardziej geometryczne określenie: to największa skończona liczba punktów, jakie uzyskujemy przecinając naszą powierzchnię płaszczyznami $az_1+bz_2 = c$. Dla powierzchni algebraicznych położonych w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej należy badać przecięcia z dwiema hiperpłaszczyznami itd.
Czy między tym geometrycznym niezmiennikiem, jakim jest stopień d, a topologicznym, jakim jest rodzaj g, jest jakiś związek? Owszem, dla powierzchni „bez dziobków" położonej w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej wiemy, że

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \text{ — liczba sklejeń, o których mowa w } c).$$

Natomiast dla powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej rzecz się od razu komplikuje i o związku między stopniem i rodzajem wiemy tyle co nic.
To dość irytujące, że nie umiemy do końca zbadać związku pomiędzy dwiema zupełnie podstawowymi liczbami przypisanymi każdej powierzchni algebraicznej.

Michał SZUREK



Powyższa tabelka zestawia, co wiemy o istnieniu gładkich powierzchni stopnia d i rodzaju g w trójwymiarowej zespolonej przestrzeni rzutowej P^3 dla $d \leqslant 10$ i $g \leqslant 12$