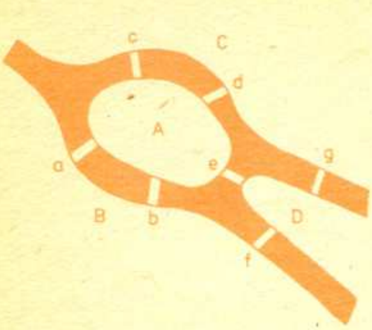
Mosty królewieckie: dwieście lat później



Rys. 1

„W Królewcu (w Prusach) jest wyspa zwana Kneiphof ..." — oto początek zdania z pracy Eulera „*Solutio problematis ad geometriam situs pertinetis*", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128—140, w której formułuje on słynne zdanie o mostach królewieckich: czy można przejść po siedmiu mostach na Pregole (mapka obok), przechodząc po każdym moście jeden raz. Odpowiedź Eulera brzmiała: nie; bo jeśliby to było możliwe, to można by bez odrywania ołówka nakreślić figurę zamieszczoną na rys. 2 przechodząc po każdym odcinku tej figury jeden raz, tj. wykazać, że ta figura jest unikursalna; figura ta jest grafem, tj. sumą skończonej ilości odcinków łączących się końcami; punkty A, ..., D symbolizują wyspy na Pregole, mostom odpowiadają odcinki a, ..., g. Euler dowiódł, że graf jest unikursalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma w nim punktów rzędu nieparzystego, lub jeśli są na nim dwa takie punkty; graf mostów królewieckich ma ich trzy; znana dobrze już dzieciom koperta (rys. 3) ma dwa takie punkty.

Unikursalność figury można przeformułować równoważnie tak:
istnieje odwzorowanie ciągłe odcinka $0 \leqslant t \leqslant 1$ na figurę, które jest nieprzywiedlne w tym znaczeniu, że po usunięciu z odcinka jakiegokolwiek przedziału otwartego, obraz pozostałości nie jest już całą figurą.

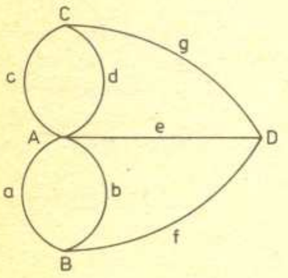
Kwadrat jest figurą unikursalną: pokazał to (być może nie zamierzając) Peano (1890); odwzorowanie ciągłe odcinka na kwadrat które zbudował (patrz np. Delta 7/1977), jest nieprzywiedlne: jeśli z odcinka usuniemy jakiś przedział, to usuniemy tym samym pewien odcinek któregoś z podziałów służących do opisu odwzorowania, a wtedy obraz pozostałości nie będzie zawierał odpowiadającego temu odcinkowi kwadratu z odpowiedniego podziału (rys. 4).

O. G. Harrold w pracy „*A note on a strongly irreducible image of an interval*", Duke Mathematical Journal 6 (1940), 750—752, dowiódł, że jeśli w figurze będącej obrazem ciągłym odcinka zbiór punktów nie rozcinających jej lokalnie jest w niej gęsty, to ta figura jest unikursalna; potwierdza to m.in. unikursalność kwadratu.

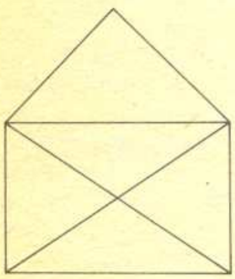
Krzywa trójkątowa Sierpińskiego (patrz np. Delta 6/1978) jest unikursalna; dendryt (z rys. 5), którego końce tworzą zbiór w nim gęsty, jest unikursalny (końce nie rozspajają dendrytu lokalnie). Figura z rys. 6 jest unikursalna, ale nie jest unikursalną figura z rys. 7.

Choć blisko dwieście pięćdziesiąt lat temu Euler scharakteryzował topologicznie unikursalność w zakresie grafów, to nie wiadomo dotąd (autor może powołać się tu na wzmiankę w pracy L. E. Warda, „*An irreducible Hahn-Mazurkiewicz theorem*", Houston Journal of Mathematics 3 (1977), 291—299), które z figur będących obrazami ciągłymi odcinka (tj. figur dających narysować się bez odrywania ołówka) są unikursalne, a które nie, czyli nie znana jest dotychczas charakteryzacja topologiczna figur unikursalnych w tak ogólnym zakresie.

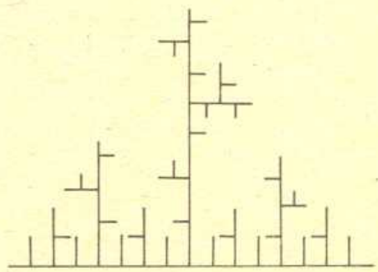
Jerzy MIODUSZEWSKI



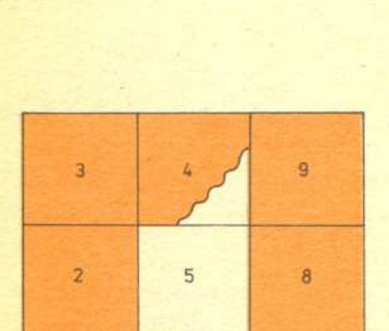
Rys. 2. Graf mostów królewieckich



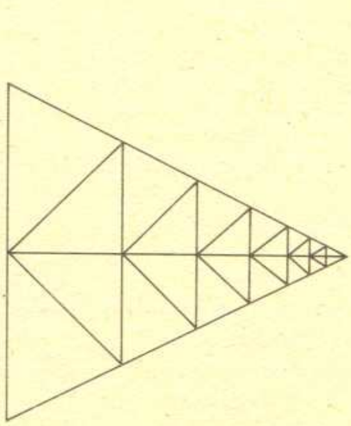
Rys. 3



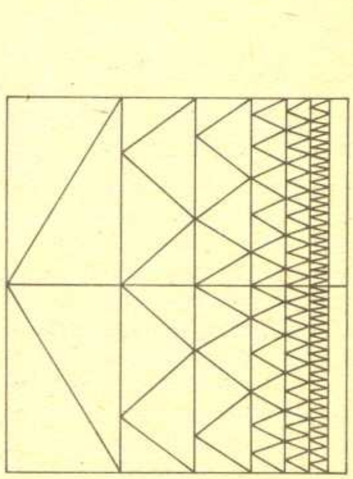
Rys. 5. Dendryt z gęstym w nim zbiorem końców.



Rys. 4. Nieprzywiedlność odwzorowania Peany



Rys. 6



Rys. 7