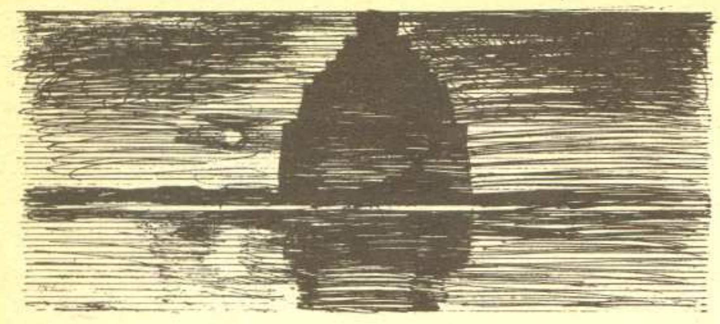

O pewności w matematyce i hipotezie continuum

Słyszy się często: „to pewne, jak 2+2 = 4". Zdania matematyczne bywają podawane za wzór niewzruszonej i absolutnej prawdy. Pytanie, jakie zdania? Niewątpliwie pewniki, czyli aksjomaty („przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta") oraz twierdzenia, choćby tak łatwe, jak to zacytowane na początku.

Istnieją jednak w matematyce zdania o zupełnie innym charakterze. Należy do nich słynna hipoteza continuum, którą można sformułować następująco: Każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny bądź ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, bądź ze zbiorem liczb naturalnych.

Hipoteza continuum jest niezależna od powszechnie przyjmowanych w matematyce aksjomatów. Formalnie oznacza to, że o ile matematyka bez hipotezy continuum jest niesprzeczna, to nie stanie się sprzeczna po dodaniu tej hipotezy lub jej zaprzeczenia. Można to inaczej sformułować mówiąc, że ani hipotezy continuum, ani jej negacji nie zdołamy udowodnić używając powszechnie używanej aksjomatyki.

No tak, zdarza się słyszeć, zwłaszcza od osób po raz pierwszy stykających się z tym dziwolągiem matematycznym, ale przecież jakoś to jest. My, być może, nie potrafimy udowodnić ani obalić hipotezy continuum, ale demon wiedzący wszystko o świecie mógłby po prostu sprawdzić, czy istnieją te pośrednie zbiory nierównoliczne ani ze zbiorem liczb naturalnych ani rzeczywistych, czy też nie. Rozumowanie to opiera się na błędnym przypuszczeniu, że zbiór liczb rzeczywistych jest takim przedmiotem, jak stojące przede mną pudełko, które wystarczy otworzyć, by przekonać się, czy jest puste; no bo albo jest puste, albo nie. Może to być co najwyżej dobrze zamknięte pudełko, tak dobrze, że nie mamy możności sprawdzić tego faktu.

Prędzej zaś zbiór liczb rzeczywistych można by przyrównać do pudełka opisanego w książce. Przypuśćmy, że autor powieści wspomniał, iż Jan dostał od wujka piękne drewniane puzderko ... i nie dodał już na ten temat ani słowa. Można zapytać, czy opisana szkatułka była pusta, czy nie: jest to pytanie nie do rozstrzygnięcia. Nasza wiedza o tym fikcyjnym przedmiocie jest za mała, podobnie, jak informacje czerpane z aksjomatów nie opisują zbioru liczb rzeczywistych na tyle dokładnie, by rozstrzygnąć hipotezę continuum. Badaczy, którzy wykazali niezależność hipotezy, można porównać do uważnego czytelnika, który przewertowawszy powieść stwierdzi: nie ma tam ani słowa o zawartości pudełka.

Tak więc żaden demon nie pomoże. Za to każdy ma prawo fantazjować: jeden z czytelników „czuje", że wujek podarował pudełko pełne złotych monet, inny, że stary skąpiec wykpił się pustą szkatułką. Tak samo matematycy: są tacy, którzy „lubią" hipotezę continuum, inni odżegnują się od niej. Pamiętajmy jednak, że w czytanej przez nich pilnie powieści —— matematyce ze zwykłą aksjomatyką — nie napisano o tym ani słowa ...

Andrzej PELC

Hipoteza Riemanna

Liczby pierwsze trafiają się wśród naturalnych jak kąkol wśród zboża i posuwając się po osi liczbowej trudno zgadnąć, czy następna napotkana liczba będzie pierwsza, czy nie. A jednak, tak jak wielokrotne nakładanie się zjawisk przypadkowych prowadzi do bardzo regularnych prawidłowości, tak i pozornie bezładnym rozmieszczeniem liczb pierwszych na osi liczbowej rządzą zdumiewająco ścisłe reguły. Oto bodajże najprostsza.

Niech $\pi(x)$ będzie liczbą liczb pierwszych nie przekraczających x. Oto tabelka wzrostu funkcji $\pi(x)$ i porównanie jej z funkcją $x/\ln x$

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$
10	4	4,3
100	25	21,7
1000	168	144,8
10000	1229	1085,7
100000	9592	8685,9
1000000	78498	72382,4
10000000	664579	620420,7
100000000	5761455	5428681,0
1000000000	50847534	48254942,4
10000000000	455052512	434294477,9

Zgodność dwu ostatnich kolumn nie najgorsza, ale można i szuka lepszych przybliżeń funkcji $\pi(x)$, opisującej rozmieszczenie liczb pierwszych. Bardzo dobrze nadaje się do tych celów funkcja Riemanna

$$R(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(\sqrt[3]{x}) - \ldots,$$

gdzie $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x (1/\log t)\,dt$.

Przykładowo, dla $x = 10^8$ mamy $R(x) = 5761552$.
Dla $x = 10^9$ zgodność jest jeszcze lepsza: $R(x) = 50847455$.

Już Riemann znał pewien dokładny wzór na $\pi(x)$. Wspomnijmy tu, że szereg

$$\text{dzeta } (s) = \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

jest zbieżny dla $s > 1$, ale dość skomplikowaną techniką funkcji analitycznych można funkcję $\zeta(s)$ przedłużyć tak, by była określona dla dowolnego zespolonego $s = \sigma + it$.

Wspomniany wzór Riemanna jest taki

$$\pi(x) = R(x) - \sum_p R(x^p),$$

gdzie sumować należy po wszystkich zerach funkcji dzeta, tj. pierwiastkach równania $\zeta(s) = 0$. Co wiemy o tych pierwiastkach? Poza tzw. pierwiastkami trywialnymi: $-2, -4, -6, -8, \ldots$ wszystkie inne znane (81 milionów) leżą na prostej $\sigma = \frac{1}{2}$; innymi słowy: ich część rzeczywista wynosi $\frac{1}{2}$. Słynna **hipoteza Riemanna** powiada, że tak jest dla wszystkich pierwiastków.

Pozytywne rozwiązanie hipotezy Riemanna miałoby olbrzymie znaczenie dla lepszego poznania funkcji $\pi(x)$, pozwalając ją obliczać z niemal dowolną dokładnością. Nic więc dziwnego, że wielu uczonych nazywa ją najpoważniejszą hipotezą współczesnej teorii liczb.

Michał SZUREK