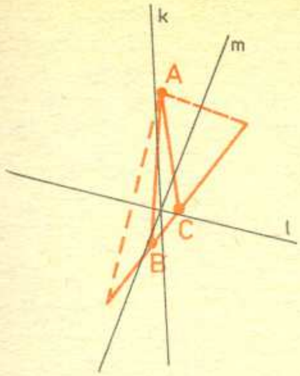
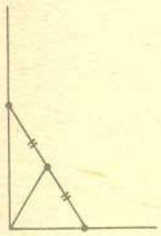
Czy można prościej?



Jak znaleźć trójkąt, gdy dane są dwusieczne k, l, m jego kątów? Ano tak: weźmy dowolny punkt A jednej z nich (np. k) nie leżący na pozostałych i odbijmy go symetrycznie względem nich (tj. względem l i m). Połączmy otrzymane obrazy prostą n. Jej przecięcia B i C z l i m tworzą wraz z A żądany trójkąt. Inne rozwiązania są jednokładne do otrzymanego — względem punktu przecięcia k, l i m. Spróbujcie teraz rozwiązać to zadanie analitycznie, mając dane równania prostych k, l i m.

Bywa i odwrotnie. Np. gdy poszukujemy krzywej utworzonej przez punkty, w których może się znaleźć środek odcinka, którego końce ślizgają się po ramionach kąta prostego. Biorąc ten kąt za osie układu współrzędnych stwierdzamy, że ma on końce $(x, 0)$ i $(0, y)$, przy czym $x^2+y^2 = a$, gdzie a jest długością odcinka. Środek zaś, to punkt $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, a więc spełnia równanie $x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}$, czyli okręgu. Spróbujcie teraz bez rachunków. Choć właściwie, gdy spojrzeć na rysunek ...



Spróbujmy jednak wykazać, że
Jeżeli w dowolnym sześciokącie ABCDEF połączymy środki (ciężkości) kolejnych trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB, to w otrzymanym sześciokącie przeciwległe boki będą równoległe.
Jeśli przypomnimy sobie, że współrzędne środka ciężkości układu punktów są średnimi arytmetycznymi współrzędnych punktów, to dowód będzie prosty. Jak to zrobić, nie posługując się geometrią analityczną?

Wybór drogi często przesądza, czy zagadnienie staje się łatwe czy trudne. Sprawa „czystości metod" pojawia się w wielu działach matematyki, szczególnie tych związanych z geometrią. Geometrzy uważają się bowiem za niezależnych i samorządnych i nie bardzo lubią, gdy ktoś z zewnątrz proponuje im własne rozwiązanie.

Trochę hałasu wywołało ostatnio rozwiązanie tzw. **problemu Hartshorne'a** z geometrii algebraicznej. Nie wdając się w szczegóły powiemy tylko, że treścią tej hipotezy było przypuszczenie, że pewna własność pól stycznych przysługuje wyłącznie przestrzeniom rzutowym (oto bardziej dokładne sformułowanie: pewna potęga wiązki stycznej wyznacza wszędzie określone odwzorowanie algebraiczne). Kilku bardzo szczególnych przypadków tej hipotezy dowodzono (nie zawsze poprawnie) wielkim nakładem sił i środków oraz metodami, na które prawdziwi geometrzy algebraiczni nieco się krzywią i przyjmują jako zło konieczne: a to teoria potencjału, a to całki po konturach, a to tensory krzywizny ... Wreszcie młody Japończyk Shigefumi Mori zdenerwował się i machnął (1980) dowód wymagający tylko znajomości podstawowych pojęć i faktów geometrii algebraicznej. Stało się jasne, że w poprzednich dowodach większość energii szła na obsługę adaptacji stosowanych metod do w miarę prostej sytuacji. Celowanie armatą we wróbla jest bowiem trudne — choć efekty ewentualnego trafienia bezsprzecznie efektowne!

Michał SZUREK

Rozwiązanie zadania F 93. Przy typowym dla lupy położeniu przedmiotu, obrazem jest w danym przypadku stożek ścięty. Rysunek pokazuje przekrój nakrętki $ABQP$ i jego obraz A' B' Q' P'. Do konstrukcji obrazu odcinka AB użyto rzeczywiście promieni: $ABCF_2$ i BO oraz promienia pomocniczego AO. Obraz podstawy walca BQ „rysują" promienie padające na całą powierzchnię soczewki, odcinek AB (bez punktu B) tylko te, które trafiają na soczewkę powyżej punktu C. Z symetrii wynika, iż całą powierzchnię boczną walca można zobaczyć, gdy oko znajdzie się w obrębie stożka, któremu na rysunku odpowiada zakropkowany obszar. Pokazano dodatkowo (kolorem) rzeczywisty bieg jednego z promieni opuszczających punkt A. Z powyższego wynikają poszukiwane warunki:
a) Soczewka powinna mieć większą średnicę niż nakrętka.
b) Oko należy umieścić w odległości większej niż wynosi ogniskowa soczewki.
W rozważaniach pomijaliśmy wymiary źrenicy. Wskutek jej skończonych rozmiarów odległość może być nieco mniejsza niż wynika to z warunku *b*), lecz następuje wtedv strata ostrości widzenia.