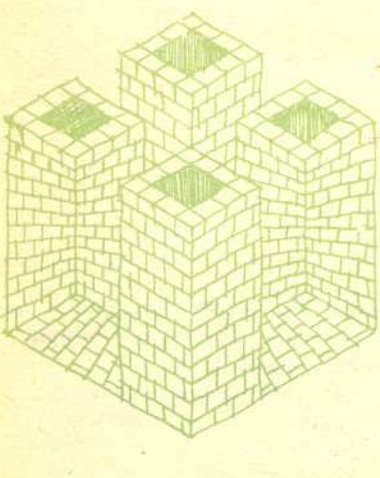
Początki metody aksjomatycznej

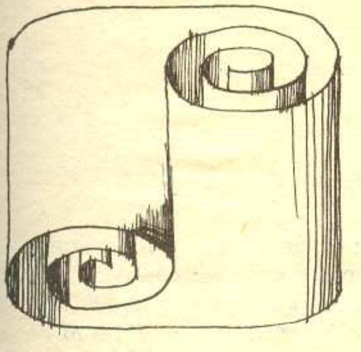
Dr Jan Waszkiewicz

W krótkiej serii artykułów nie sposób wyczerpać problemów związanych z narodzinami dedukcji i metody aksjomatycznej. Warto jednakże na drodze do wyjaśnienia ich genezy zrobić jeszcze kilka kroków — nawet za cenę stopniowego oddalenia się od matematyki...
W poprzednim artykule pisałem o tym, że część aksjomatów Euklidesa można interpretować jako podstawę do selekcji osób, z którymi chciałby on dyskutować na temat przedstawianych wyników matematycznych. Wspomniałem również o szkole filozoficznej eleatów, której członkowie byliby zapewne wykluczeni z takiej dyskusji. Ze względu na zakres ich zainteresowań, obecność wśród matematyków zwolenników eleackiego sposobu myślenia grozić mogłaby tym, że dyskusja nad własnościami przestrzeni przerodziłaby się w spór o sens najprostszych używanych w geometrii pojęć. Spory tego rodzaju pojawiły się w w matematyce (lub raczej — stały się istotnym jej składnikiem) dopiero na przełomie XIX i XX wieku...
W czasach Euklidesa szkoła eleacka należała już do przeszłości. Nie oznacza to wszakże, że tym samym zniknęli potencjalni dyskutanci nie zgadzający się z przyjmowanymi przez niego aksjomatami. Pojawili się inni, a można powiedzieć, że znacznie od eleatów groźniejsi. W piątym i czwartym wieku p.n.e. działała w Grecji liczna grupa nauczycieli i wychowawców, przygotowujących swoich uczniów (nie tylko młodzież) do życia publicznego. Ze względu na olbrzymią rolę argumentacji słownej w publicznym życiu Grecji, poświęcali oni znaczną uwagę doskonaleniu sztuki przekonywania. Trudno zresztą mówić o jednej sztuce — należy raczej mieć na uwadze kilka, blisko ze sobą powiązanych umiejętności: dyskusji (dialektyki), w skład której wchodziła również sztuka zwyciężania za pomocą chwytów nieczystych (erystyka), przekonywania grupy słuchaczy (retoryka), a nawet elementy aktorstwa... Sofiści, bo tak nazywano owych nauczycieli, zdaniem współczesnego im Platona ,,tacy się straszni zrobili w walce na słowa i w zbijaniu wszystkiego, co ktoś powie — wszystko jedno, czy to będzie fałsz, czy prawda", a poza tym ,,mówią, że w krótkim czasie potrafią i kogoś innego, byle kogo, uczynić mistrzem w tym samym zakresie".
Paradoks, który u eleatów był trudnością (aporia) — a więc czymś domagającym się przezwyciężenia, dotarcia do głębszych własności danej nam w potocznym doświadczeniu rzeczywistości, u sofistów stał się celem samym w sobie. Za pomocą paradoksalnych rozumowań sofiści uczyli sztuki przekonywania, ale też dobrze zbudowany paradoks był dla nich głównym narzędziem skutecznego prowadzenia sporu. Oto przykład takiego opartego na paradoksie zwycięstwa, wzięty z platońskiego dialogu ,,Eutydem". Tytułowa postać — znany sofista — pokazuje swoją sztukę w dyskusji ze znacznie mniej doświadczonym przeciwnikiem — Kleiniasem. Punktem wyjścia jest wspólnie uzgodniona teza, że to mądrzy ludzie, nie zaś głupi, są tymi, którzy się uczą.
Po kilku wstępnych pytaniach, które pomijam z braku miejsca, dochodzi do następującego fragmentu dyskusji.
Eutydem: — ,,Więc prawda, że kiedyście się uczyli, to jeszcze nie wiedzieliście tego, czegoście się uczyli?
— Nie — powiada Kleinias.
— Więc czyście byli mądrzy, kiedyście tego nie wiedzieli?
— Ano nie — mówi.
— Nieprawdaż, więc jeśli nie mądrzy, to głupi?
— Tak jest.
— Więc wy ucząc się czegoście nie wiedzieli, uczyliście się jako głupi?
Chłopak skinął głową.
— Więc głupi się uczą na mądrych Kleiniaszu, a nie mądrzy, jak się tobie wydaje".
Do tego miejsca sprawa jest jeszcze prosta. Wykazano, że chłopak Kleiniasz niesłusznie przyjął na początku sporu, że to mądrzy właśnie są tymi, którzy się uczą. Jednakże Eutydem nie zatrzymuje się w tym miejscu — pokazuje bowiem, że teza przeciwna jest również nie do przyjęcia. (Głupi bowiem to ci, których nie można niczego nauczyć...)
W tym krótkim przykładzie widać różne sofistyczne sztuczki: żonglowanie subtelnymi odcieniami znaczeń, wykorzystywanie niedookreśloności stosowanych pojęć, czy wreszcie — żerowanie na braku wyrobienia i naiwności przeciwnika. Z wytrawnym dyskutantem, Sokratesem, Eutydem ponosi jednak porażkę... Bo w końcu o to tutaj chodziło — o zwycięstwo za wszelką cenę w potyczce, którą była dyskusja (audytorium było gronem sędziów oceniających walczących przeciwników). Tymczasem, przypomnijmy, że w dyskusji — jaką stanowi dialog matematyka z czytelnikiem dowodu jego twierdzenia, chodzi o coś innego. Nie pokazanie przewagi jest istotne, ale wspólne dojście do prawdy (choćby fragmentarycznej) w interesującym obie strony przedmiocie. Dlatego właśnie stwierdziłem, że sofiści byli dla ewentualnych dyskusji o matematyce znacznie niebezpieczniejsi od swoich poprzedników, eleatów.



Toteż pomimo pewnego pozytywnego wkładu w rozwój matematyki (doskonalenie metod rozumowania — zwłaszcza ulubionej przez matematyków redukcji do absurdu, rozwój logiki formalnej jako próby obrony przed sztuczkami sofistów...) sofiści nie cieszą się w historii matematyki dobrą opinią. To na ich cześć sofizmatami nazwano ,,dowody"

fałszywych twierdzeń, w których subtelne błędy przemycane są na tyle zręcznie, że całość rozumowania ma wszelkie pozory poprawności. Oto prosty przykład takiego sofizmatu (wiele ich znaleźć można w różnych zbiorach matematycznych rozrywek i ciekawostek).
Twierdzenie. Istnieją okręgi mające dwa różne środki.
Dowód. Pomiędzy dwiema równoległymi prostymi p i q obierzmy dowolny punkt M. Z punktu tego poprowadźmy odcinki $\overline{MP}$ i $\overline{MQ}$ prostopadłe do danych prostych ($P \in p$, $Q \in q$). Przez punkty M, P i Q poprowadźmy okrąg, który zadane proste przetnie odpowiednio w punktach R i S (rysunek). Prosty kąt MPQ oparty jest na półokręgu nakreślonego koła. W związku z tym, środek okręgu leży w punkcie O' będącym środkiem odcinka $\overline{MQ}$. Podobnie inny środek O'' leży w połowie odcinka $\overline{MQ}$. Co kończy dowód...
No dobrze, można zapytać, ale skąd brali się ludzie chcący płacić sofistom za lekcje ich wątpliwych sztuczek? Musiało ich przy tym być niemało, jeśli — jak powiedziano — sofiści stanowili liczną grupę w społeczeństwie greckim w okresie powstawania aksjomatycznego systemu geometrii. Jest to pytanie znacznie ogólniejszej natury niż to, które postawiliśmy na początku cyklu artykułów. Toteż i odpowiedź znaleźć można jedynie poprzez odwołanie się do szerszego kontekstu wydarzeń historycznych. Zdaniem historyków, na przełomie VIII i VII wieku p.n.e. w Grecji doszło do wytworzenia swoistej formy organizacji życia zbiorowego — miasta-państwa (polis). Według opinii francuskiego historyka J. P. Vernanta („*Źródła myśli greckiej*", PWN, Warszawa 1969) „system *polis* zakłada przede wszystkim niezwykłą przewagę słowa nad innymi narzędziami władzy. Mowa staje się instrumentem *par excellence* politycznym, kluczem wszelkiego autorytetu w państwie, środkiem rządzenia i panowania nad innymi. [...] Mowa [...] staje się starciem, dyskusją, argumentacją. Wymaga ona publiczności występującej jako sędzia, który przez wzniesienie rąk wybiera ostatecznie jedną ze stron przed nim stojących. Ta czysto ludzka decyzja jest właśnie miernikiem siły przekonywania dwu mów, zapewniających jednemu z mówców zwycięstwo nad przeciwnikiem".



W takim właśnie kontekście kształtowała się zarówno metoda dedukcyjna, jak i praktyczna działalność sofistów. Taka właśnie była kultura Grecji, zwłaszcza w tych miastach, które (jak np. Ateny) przez następne stulecia doskonaliły mechanizmy demokratycznego społeczeństwa. Tak więc, metoda dedukcyjna była „matematycznym zastosowaniem" dialektycznej metody filozofii, ta zaś — wcieleniem demokratycznych mechanizmów sprawowania władzy. Pytanie o źródła metody dedukcyjnej staje się więc pytaniem o źródła greckiej demokracji... Odpowiedzi na to ostatnie pytanie radzimy Czytelnikowi poszukać w książkach omawiających dzieje i kulturę starożytnej Grecji.

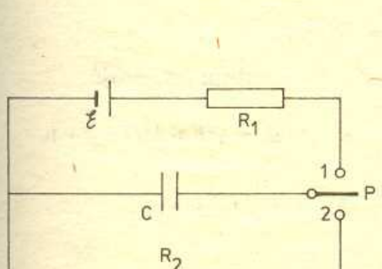
Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 253. W ciągu cyfr rozpoczynających się 1981... każda następna cyfra to liczba jedności sumy czterech cyfr poprzednich. Czy w ciągu naszym pojawi się 1982? A 1981 jeszcze raz?
Rozwiązanie na str. 7
M 254. Pokazać, że koło o promieniu 1 można podzielić na 6 części o średnicy 1 i nie można podzielić na 7 części o średnicy mniejszej niż 1.
Rozwiązanie na str. 12
M 255. Na ile sposobów można przedstawić 1000 jako sumę kolejnych liczb naturalnych?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 90. Rozładowując kondensator przez rozcieńczony kwas siarkowy otrzymuje się „mieszaninę piorunującą". Jej masa, zgodnie z I prawem elektrolizy, zależy jedynie od ładunku przepływającego przez roztwór. Używając, zamiast jednego, większej ilości połączonych szeregowo elektrolizerów, można przy pomocy jednego kondensatora wydzielać dowolnie dużą masę gazu. Elektroliza trwać będzie odpowiednio dłużej, mimo to, spalając produkty, otrzyma się nieograniczoną ilość ciepła. Jest to oczywiście sprzeczne z zasadą zachowania energii, gdyż początkowa energia naładowanego kondensatora jest skończona. Wykryć błąd w przytoczonym rozumowaniu.
Rozwiązanie na str. 6



F 91. Przełącznik P (patrz rysunek) zwierany jest na przemian z zaciskami 1 i 2. Czasy zetknięcia są jednakowe, lecz tak małe, że zmiany ładunku kondensatora podczas operacji stykania są niewielkie. Jaki ładunek zgromadzi się na kondensatorze po bardzo dużej ilości przełączeń? Parametry elementów umieszczone na schemacie potraktować jako dane.
Rozwiązanie na str. 3