O prostych i płaszczyznach współstożkowych

Skrót pracy, która uzyskała I nagrodę na konkursie prac maturalnych z matematyki w 1980 roku.

Niech Q będzie krzywą stopnia drugiego, położoną w pewnej płaszczyźnie H. Stożkiem o wierzchołku $p \notin H$ nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez p i przecinających Q. W szczególności Q może być parą prostych przecinających się lub równoległych, a p — punktem w nieskończoności. Wtedy stożek składa się z dwu płaszczyzn przecinających się albo równoległych.

Przez stożek dualny będziemy rozumieć zbiór wszystkich płaszczyzn stycznych do pewnej krzywej płaskiej drugiego stopnia, przechodzących przez ustalony punkt nie należący do tej płaszczyzny. Sześć prostych $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ nazwiemy współstożkowymi, gdy są równoległe do tworzących pewnego stożka. Analogicznie sześć płaszczyzn nazwiemy współstożkowymi, kiedy są równoległe do płaszczyzn pewnego stożka dualnego.

Twierdzenie 1. Proste $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ o wektorach kierunkowych $(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \ldots$ $\ldots, (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})$ są współstożkowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1x}^2 & a_{1y}^2 & a_{1z}^2 & 2a_{1x}a_{1y} & 2a_{1y}a_{1z} & 2a_{1z}a_{1x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{6x}^2 & a_{6y}^2 & a_{6z}^2 & 2a_{6x}a_{6y} & 2a_{6y}a_{6z} & 2a_{6z}a_{6x} \end{vmatrix}$$

jest równy zeru.

Dowód. Możemy założyć, że proste $l_1, \ldots, l_6$ są równoległe do tworzących stożka Γ, którego wierzchołkiem jest (0, 0, 0). Zatem na Γ leżą proste $x_j = ta_{jx}, y_j = ta_{jy}, z_j = ta_{jz}$, gdzie t jest parametrem. Napiszmy równanie stożka Γ w postaci

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx = 0. \tag{1}$$

Podstawiając, mamy dla $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,:

$$t^2(Aa_{jx}^2+Ba_{jy}^2+Ca_{jz}^2+2Da_{jx}a_{jy}+2Ea_{jy}a_{jz}+2Fa_{jz}a_{jx}) = 0. \tag{2}$$

Traktując to jako równanie jednorodne z niewiadomymi A, B, C, D, E, F dostajemy, że wymieniony w tezie wyznacznik jest równy zeru. Na odwrót, jeżeli wyznacznik jest równy zeru, to układ (2) ma rozwiązania niezerowe i proste $l_1, \ldots, l_6$ są równoległe do tworzących stożka opisanego przez równanie (1).

W bardzo podobny sposób dowodzi się następujące

Twierdzenie 2. Płaszczyzny $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ o wektorach normalnych $(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \ldots$ $\ldots, (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})$ są współstożkowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik z twierdzenia 1 jest równy zeru.

Twierdzenie 3. Niech przekształcenie afiniczne T przekształca 6 niewspółstożkowych płaszczyzn na 6 innych tak, że pola na nich nie ulegają zmianie. Wówczas T jest izometrią.

Dowód (szkic). Możemy założyć, że punkt $0 = (0, 0, 0)$ jest wspólnym punktem wszystkich sześciu płaszczyzn $\pi_1, \ldots, \pi_6$. Składając z T jednokładność $J_o^{1/k}$ i ewentualnie translację R otrzymamy przekształcenie $T' = J_o^{1/k} \circ R \circ T$ które zachowuje O a nie zmienia odległości płaszczyzn równoległych do $\pi_1, \ldots, \pi_6$. Niech T' ma przedstawienie

$$\begin{aligned} x' &= a_x x+a_y y+a_z z \\ y' &= b_x x+b_y y+b_z z \\ z' &= c_x x+c_y y+c_z z. \end{aligned}$$

Z warunku zachowywania odległości płaszczyzn równoległych do danych wynika, że macierz utworzona ze współczynników $a_x x, \ldots, c_z z$ jest ortogonalna. Wynika stąd, że T jest izometrią.

Przykład. Rozpatrzmy ostrosłup prawidłowy o podstawie będącej sześciokątem foremnym oraz przekształcenie afiniczne S, które na płaszczyźnie podstawy ostrosłupa jest jednokładnością o środku w środku sześciokąta i współczynniku 1/2, zaś na prostej zawierającej wysokość ostrosłupa jest jednokładnością o tym samym środku i współczynniku 2. Przekształcenie to zachowuje pola na wszystkich sześciu płaszczyznach w których leżą ściany ostrosłupa, ale nie jest izometrią.

Z twierdzenia 3 wynika kilka wniosków.

Wniosek 1. Ponumerujmy w czworościanie $ABCD$ krawędzie liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6 i niech S_i oznacza pole trójkąta zbudowanego na i-tej krawędzi i wierzchołku będącym środkiem krawędzi przeciwległej do i-tej. Niech S_i' mają podobne znaczenie w czworościanie $A'B'C'D'E'F'$. Wówczas $ABCD$ jest podobny do $A'B'C'D'E'F'$ wtedy i tylko wtedy gdy $S_1:S_2:S_3:S_4:S_5:S_6 = S_1':S_2':S_3':S_4':S_5':S_6'$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że płaszczyzny w których leżą opisane trójkąty nie są współstożkowe.

Wniosek 2. Przekształcenie afiniczne T jest podobieństwem, gdy przekształca pewną sferę na sferę.

Wniosek 3. Elipsoida jest sferą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje 6 płaszczyzn współstożkowych, przechodzących przez jej środek i wycinających z niej przekroje o równych polach.

Zbigniew JELONEK

Rozwiązanie zadania M 253. Badając parzystość kolejnych cyfr naszego ciągu łatwo sprawdzimy, że ma on postać n n p n n n n p n n n n p ... (n — cyfra nieparzysta, p — parzysta). Nie może się więc znaleźć w nim 1982, zawierające pod rząd dwie cyfry parzyste. Zauważmy teraz, że ponieważ wszystkich możliwych grup czterocyfrowych jest 10000, więc pewna czwórka cyfr powtórzy się wśród pierwszych 10004 cyfr. Niech np. $\overline{c_k c_{k+1} c_{k+2} c_{k+3}} = \overline{c_l c_{l+1} c_{l+2} c_{l+3}}$, $k < l$. Łatwo sprawdzić, że również $c_{k-1} = c_{l-1}$, $c_{k-2} = c_{l-2}$ itd. i wobec tego $\overline{c_{l-k+1} c_{l-k+2} c_{l-k+3} c_{l-k+4}} = \overline{1981}$.