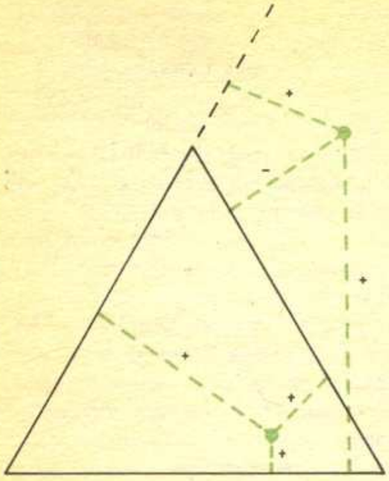
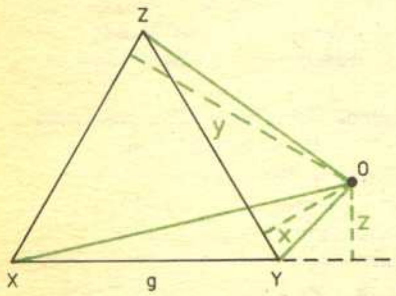


Planowana jest budowa sklepu spożywczego S, który zaopatrywany będzie przez piekarnię P, mleczarnię M i browar B. Gdzie należy zbudować sklep, by samochody dostawcze zaopatrujące go w pieczywo, mleko i piwo pokonywały w sumie najmniejsze odległości?

Pytanie to postawił francuski matematyk Fermat włoskiemu fizykowi Torricellemu w następującej wersji geometrycznej: mając dany trójkąt znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza. Torricelli rozwiązał to zadanie kilkoma sposobami. Najprostszy z nich opiera się na następującym **twierdzeniu Vivianiego.**

Suma trzech odległości dowolnego punktu płaszczyzny od boków danego trójkąta równobocznego nie zależy od położenia tego punktu.
Uwaga: odległość punktu O od boku trójkąta uznajemy za dodatnią, o ile punkt i trójkąt leżą w tej samej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą l zawierającą ten bok, a ujemną w przeciwnym przypadku. Wartość bezwzględną tej odległości przyjmujemy za równą odległości punktu O od prostej l.



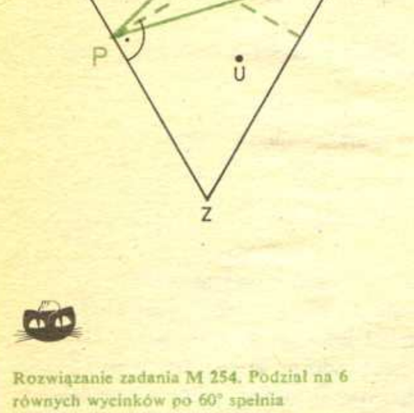
Dowód:
Niech $\Delta\, XYZ$ będzie równoboczny, g niech oznacza długość jego boku, J — pole, a x, y, z odpowiednio odległości danego punktu O od boków $\overline{YZ}$, $\overline{ZX}$, $\overline{XY}$. Wówczas

$$\frac{1}{2}gx+\frac{1}{2}gy+\frac{1}{2}gz = J \qquad \text{(uwzględniamy znaki!).}$$

Zatem

$$x+y+z = \frac{2J}{g}, \qquad \text{co kończy dowód.}$$

Niech teraz ΔPMB będzie trójkątem wyznaczonym przez piekarnię, mleczarnię i browar. Wybierzmy punkt S tak, by proste prostopadłe do odcinków SP, SM, SB odpowiednio w punktach P, M, B wyznaczały trójkąt równoboczny XYZ. Niech $S' \neq S$ będzie jakimkolwiek innym punktem. Wówczas, jeśli $S'P'$, $S'M'$, $S'B'$ są prostopadłymi opuszczonymi odpowiednio na boki trójkąta XYZ, to mamy $S'P' \leqslant S'P$, $S'M' \leqslant S'M$, $S'B' \leqslant S'B$, gdzie jedna przynajmniej nierówność musi być ostra. Zatem $S'P'+S'M'+S'B' < S'P+$ $+S'M+S'B$. Jednakże stosując twierdzenie Vivianiego do ΔXYZ otrzymujemy $SP+SM+SB \leqslant S'P'+S'M'+S'B'$, przy czym, ponieważ S jest wewnątrz trójkąta XYZ, znak $=$ zachodzi, gdy S' jest również wewnątrz tego trójkąta, a $<$, gdy jest on na zewnątrz. Ostatecznie mamy więc $SP+SM+SB < S'P+S'M+S'B$, co dowodzi, że S jest poszukiwanym punktem.



Z konstrukcji wynika, że S jest punktem przecięcia łuków kołowych o cięciwach $\overline{PM}$, $\overline{MB}$, $\overline{BP}$ i kącie rozwarcia 120°. Taki punkt istnieje, o ile wszystkie kąty ΔPMB są mniejsze niż 120°. O ile jeden z nich, np. $\sphericalangle\, PBM \geqslant 120°$, wówczas poszukiwanym punktem S jest B.

Dowód:
Wystarczy wykazać, że $PB+MB < PU+MU+BU$ dla dowolnego U. Oznaczmy

$$\gamma = \sphericalangle\, PBM, \varphi = \sphericalangle\, PBU, \quad \psi = \sphericalangle\, MBU.$$

Niech F będzie rzutem punktu U na prostą zawierającą PB, a G — rzutem punktu U na prostą zawierającą BM. Wówczas, jeśli x, y są odpowiednio odległościami B od F i G, to

$$x = BU\cdot\cos\varphi, \qquad y = BU\cdot\cos\psi$$

(przy czym, jeśli któryś z cosinusów jest ujemny, to odpowiednią odległość traktujemy jako liczbę ujemną).
Otrzymujemy $PB = PF+x$, $MB = MG+y$, czyli $PB+MB = PF+MG+x+y$.
Z drugiej strony

$$(*) \qquad x+y = BU\cdot\cos\varphi+BU\cdot\cos\psi = BU(\cos\varphi+\cos\psi) =$$
$$= 2BU\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\psi-\varphi}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 254. Podział na 6 równych wycinków po 60° spełnia oczywiście warunki pierwszej części zadania. Rozważmy teraz podział na 7 części. Zachodzi wtedy jedna z dwóch możliwości: albo jedna z części zawiera środek koła i punkt na jego obwodzie i wtedy jej średnica jest większa lub równa 1, albo jedna część zawiera środek, a 6 pozostałych pokrywa cały obwód koła. W drugim przypadku co najmniej jedna z części musi zawierać dwa punkty odległe co najmniej o 1/6 obwodu. Część ta ma wtedy średnicę $\geqslant$ 1.

Jeden z powyższych cosinusów ma wartość $\cos\frac{\gamma}{2}$ (który z nich — to zależy od tego, czy U leży wewnątrz, czy na zewnątrz $\sphericalangle MBP$), ale ponieważ $\gamma \geqslant 120°$, więc $\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Zatem maksymalna wartość wyrażenia (*) to BU.
Otrzymujemy

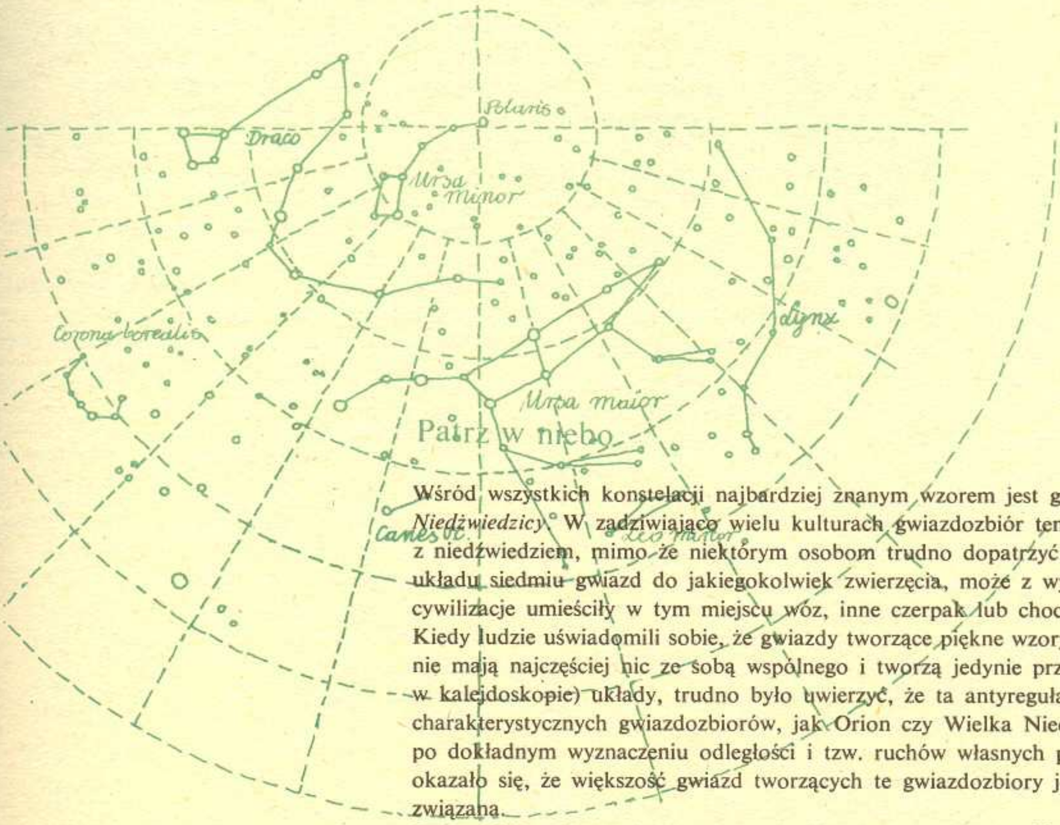
$$PB+MB \leqslant PF+MG+BU.$$

Ponieważ jednak przyprostokątne PF i GM trójkątów prostokątnych ΔPFU i ΔMGU są krótsze niż ich przeciwprostokątne PU i MU, więc ostatecznie otrzymujemy:

$$PB+MB < PU+MU+BU.$$

Oznacza to, że w rozważanym przypadku poszukiwany punkt S równy jest B, czyli że sklep należy wybudować w obrębie browaru. Ma to tę dodatkową zaletę, że zapewnia regularną dostawę świeżego piwa.

Mgr Andrzej PELC



Patrz w niebo

Wśród wszystkich konstelacji najbardziej znanym wzorem jest gwiazdozbiór *Wielkiej Niedźwiedzicy*. W zadziwiająco wielu kulturach gwiazdozbiór ten był związany z niedźwiedziem, mimo że niektórym osobom trudno dopatrzyć się podobieństwa tego układu siedmiu gwiazd do jakiegokolwiek zwierzęcia, może z wyjątkiem kaczki. Niektóre cywilizacje umieściły w tym miejscu wóz, inne czerpak lub chochlę.

Kiedy ludzie uświadomili sobie, że gwiazdy tworzące piękne wzory na niebie w rzeczywistości nie mają najczęściej nic ze sobą wspólnego i tworzą jedynie przypadkowe (jak w kalejdoskopie) układy, trudno było uwierzyć, że ta antyreguła dotyczy także tak charakterystycznych gwiazdozbiorów, jak Orion czy Wielka Niedźwiedzica. I o dziwo, po dokładnym wyznaczeniu odległości i tzw. ruchów własnych poszczególnych składników, okazało się, że większość gwiazd tworzących te gwiazdozbiory jest ze sobą w pewien sposób związana.

Już w 1869 roku R. A. Proctor stwierdził, że 5 ,,środkowych" gwiazd Wielkiej Niedźwiedzicy porusza się razem w jednym kierunku. Od tego czasu zidentyfikowano wiele kolejnych składników tej grupy. Jest to najbliższa znana nam gromada gwiazd, prawie dwa razy bliższa niż Hiady w Byku (*Patrz w niebo* 12/1979). Obecnie znamy już około dwudziestu członków *Ursa Maior*. Należą do niej również gwiazdy leżące poza macierzystą konstelacją, np. *21 Małego Lwa* (*Leo Minoris*), α *Korony Północnej* (*Coronae Borealis*) — spróbujcie znaleźć te gwiazdy na niebie według mapki obok.

Do grupy tej należą również słabsze gwiazdy z wymienionych gwiazdozbiorów a także ze *Smoka* (*Draco*) i *Małej Niedźwiedzicy* (*Ursa Minor*).

Środek gromady odległy jest od nas o około 75 lat świetlnych, ma ona kształt elipsy o osi wielkiej ~30 lat świetlnych i małej ~18.

Kiedy odkryto, że prawie wszystkie jasne gwiazdy w Wielkiej Niedźwiedzicy tworzą gromadę — astronomowie zauważyli, że w ogóle wiele bardzo jasnych gwiazd, między innymi *Syriusz*, α *Wężownika*, δ *Lwa*, β *Woźnicy* i wiele innych, porusza się w przestrzeni względem nas mniej więcej w jednym kierunku, pokrywającym się z kierunkiem, w którym zmierza gromada *Ursa Maior*. Obecnie uważa się, że te jasne, bliskie gwiazdy nie są członkami powyższej gromady, ale tworzą coś w rodzaju dużego strumienia gwiazd. Gromada *Ursa Maior* porusza się razem z tym strumieniem. Nasze Słońce jest w nim zanurzone, więc jego składniki mijają nas ze wszystkich stron, co tłumaczy ich obecność w różnych częściach nieba.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI