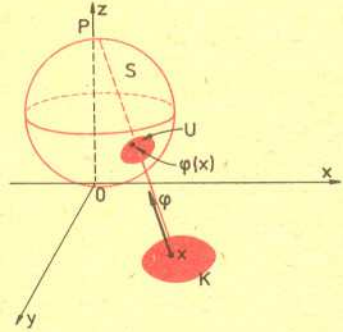


O powierzchniach i liniach geodezyjnych

Dr Witold MOZGAWA



Na pewno każdy spotkał się z następującym zadaniem: mamy na planie pewnego miasta dwa punkty — jak znaleźć najkrótszą drogę, która je łączy? Zadanie to zwykle bardzo łatwo rozwiązujemy i oczywiście jest, że takich dróg możemy czasem znaleźć wiele. Oczywiście jest też, że zwykle taka droga jest dłuższa od pomyślanej linii prostej łączącej wspomniane dwa punkty. Nieporównanie już trudniej odpowiedzieć na takie pytanie, gdy jesteśmy na „terenie pofalowanym” np. w górach. Spróbujemy zaprząć matematykę do rozwiązania naszego problemu. Jak to się zwykle czyni w takich wypadkach, musimy stworzyć matematyczny model „pofalowanej powierzchni” i tam dopiero będziemy badać, które drogi są najkrótsze.



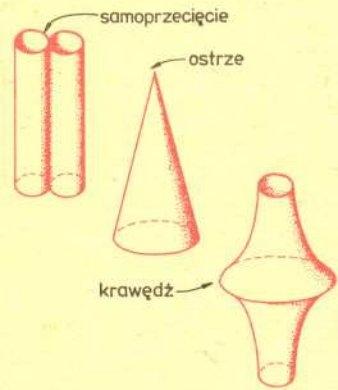
Rys. 1 Płaszczyzna Oxy odwzorowuje się na $S \setminus \{p\}$ przez tzw. obraz sferyczny w kierunku punktu p — jest to parametryzacja. Płaszczyzna $z = 2r$ (r — promień sfery S) odwzorowuje się na $S \setminus \{0\}$ przez obraz sferyczny w kierunku punktu O — jest to także parametryzacja. Obie te parametryzacje pokrywają całą sferę.

Zbiór S w przestrzeni euklidesowej E^3 będziemy nazywali *powierzchnią*, jeśli dla każdego punktu $m \in S$ istnieje podzbiór $U \subset S$, $m \in U$ (otoczenie punktu m), który może być otrzymany przez rozciąganie, ściskanie, wyginanie, wykręcanie koła bez brzegu K . Możemy też dowolnie rozciąć koło K i wykonać powyższe operacje pod warunkiem, że skleimy otrzymany zbiór dokładnie w miejscu rozcięcia. Zwykle powyższe operacje opisujemy określając funkcje $\varphi: K \rightarrow U \subset S$, które (spełniając pewne warunki) gwarantują nam, że zbiór S jest powierzchnią. Funkcję φ nazywa się parametryzacją otoczenia U punktu $m \in S$. Niestety taka definicja obejmuje zbyt szeroką klasę powierzchni i aby już ostatecznie sprecyzować przedmiot naszych zainteresowań musimy określić, co rozumiemy przez wektor oraz płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie m . Załóżmy, że już wiemy, co to jest krzywa i wiemy, że wektor do niej styczny to pochodna jej opisu parametrycznego.

Załóżmy, że dla parametryzacji φ otoczenia U punktu $m \in S$ mamy $\varphi(x_0, y_0) = m$, $(x_0, y_0) \in K$. Rozważmy odcinki prostych równoległych do osi układu współrzędnych na płaszczyźnie przechodzące przez punkt $(x_0, y_0) \in K$ — mają one następujące opisy parametryczne: $(x_0 + t, y_0)$ i $(x_0, y_0 + t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jeśli złożymy te opisy z parametryzacją φ otoczenia U , to otrzymamy dwie krzywe leżące na powierzchni S , przecinające się w punkcie m : o opisach parametrycznych $\varphi(x_0 + t, y_0)$ i $\varphi(x_0, y_0 + t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jeśli teraz obliczymy pochodne tych opisów w punkcie $t = 0$, to otrzymamy dwa wektory φ_x i φ_y styczne do krzywych w punkcie m , a więc tym samym styczne do powierzchni S :

$$\varphi_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \varphi(x_0 + t, y_0) \Big|_{t=0}$$

$$\varphi_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \varphi(x_0, y_0 + t) \Big|_{t=0}$$



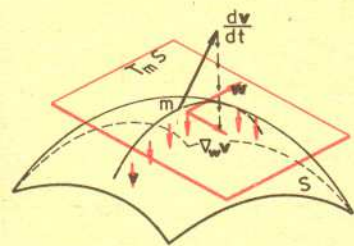
Rys. 2 Tego rodzaju zbiory są poza naszymi zainteresowaniami.

Zauważmy, że jeżeli weźmiemy dowolną krzywą leżącą na powierzchni i wyznaczmy wektor v styczny do niej w punkcie m , to zawsze znajdą się takie dwie liczby rzeczywiste a i b , że $v = a\varphi_x + b\varphi_y$. Wobec tego będziemy mówili, że wektory φ_x i φ_y są wektorami bazowymi płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie m , płaszczyznę tę będziemy oznaczali przez $T_m S$. Możemy teraz sformułować ostatni warunek ograniczający klasę powierzchni: będziemy mówili, że powierzchnia S jest *regularna* jeśli wektory φ_x i φ_y istnieją i nie są równoległe ani zerowe w żadnych punktach S . Podsumowując, powierzchnią w trójwymiarowej przestrzeni E^3 będziemy nazywali taki zbiór, który jest otrzymany z otwartych kół, zdeformowanych w wyżej opisany sposób i połączonych ze sobą tak, aby nie było ostrzy, krawędzi, samoprzecięć i żeby można było sensownie mówić o płaszczyźnie stycznej w każdym punkcie. Różniczkowalne przyporządkowanie $m \rightarrow v(m)$ (punktowi \rightarrow wektor styczny w tym punkcie) będziemy nazywali *polem wektorowym*. Aby dalej budować aparat potrzebny do rozwiązania naszego problemu wprowadzimy różniczkowanie zależne od kształtu powierzchni:

Niech v będzie polem wektorów stycznych na U , a w pewnym wektorem stycznym do S w m i $\gamma: (-\xi, \xi) \rightarrow U$ krzywą taką, że $\gamma(0) = m$, $\frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = w$ oraz $v(t)$ będzie ograniczeniem pola v do krzywej γ na powierzchni S . Pochodna $\frac{dv(t)}{dt}$ na ogół jest wektorem niestycznym do powierzchni S . Wektor otrzymany przez rzut prostopadły wektora $\frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0}$ na płaszczyznę styczną $T_m S$ będzie nazywany *pochodną kowariantną* lub *pochodną Levi-Civity* pola wektorowego v względem wektora w . Będziemy tę pochodną oznaczali przez $(\nabla_w v)(m)$. Jeśli wyliczymy $\nabla_w v$ we współrzędnych, to otrzymamy

$$\nabla_w v = (a' + \Gamma_{11}^1 \cdot a \cdot k' + \Gamma_{12}^1 \cdot a \cdot f' + \Gamma_{21}^1 \cdot b \cdot k' + \Gamma_{22}^1 \cdot b \cdot f') \cdot \varphi_x + (a' + \Gamma_{11}^2 \cdot a \cdot k' + \Gamma_{12}^2 \cdot a \cdot f' + \Gamma_{21}^2 \cdot b \cdot k' + \Gamma_{22}^2 \cdot b \cdot f') \cdot \varphi_y$$

gdzie wektor $w = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi(k(t), f(t))}{dt} \Big|_{t=0} = k' \varphi_x(m) + f' \varphi_y(m)$, a pole wektorowe $v = a\varphi_x + b\varphi_y$. Współczynniki Γ_{jk}^i zależą od powierzchni i jej parametryzacji i są zwykle nazywane *symbolami Christoffela*.



Rys. 3 Konstrukcja pochodnej Levi — Civity.
Tullio Levi — Civita (1873—1941) matematyk włoski. Autor prac z rachunku tensorowego, równań różniczkowych oraz mechaniki ciał niebieskich.
Elwin Bruno Christoffel (1829—1900) — matematyk niemiecki. Zajmował się teorią funkcji i teorią równań różniczkowych.

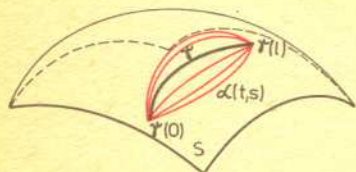
Wiemy, że długość krzywej $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ jest dana wzorem

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt,$$

Parametryzacja naturalna to taka, że długość łuku krzywej γ od $\gamma(\alpha)$ do $\gamma(\beta)$ jest równa $|\alpha - \beta|$.

Twierdzenie Fermata: Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $\langle x_0 - \zeta, x_0 + \zeta \rangle$ i osiąga ekstremum w punkcie x_0 , to $f'(x_0) = 0$.

Pierre Fermat (1601—1665) — francuski matematyk, prawnik i lingwista. Był jednym z twórców teorii liczb, a także podstaw rachunku różniczkowego i teorii prawdopodobieństwa.

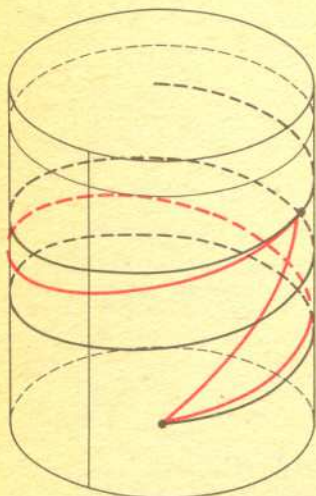


Rys. 4 Wariacje krzywej.

Skutki braku wyobraźni

Kilka lat temu Indianie chcieli (z wiadomym skutkiem) odkupić od rządu USA Manhattan, zwracając otrzymane w 1626 roku od Petera Minueta 39 dolarów. Gdyby jednak wtedy nie kupili za te pieniądze paciorków i wody ognistej, a złożyli do banku na 6,3%, mieliby dziś ponad 100 miliardów dolarów i przynajmniej kawalek z pewnością by wytargowali.

Alexis Claudé Clairaut (1713—1765) — francuski astronom, geodeta i matematyk. Zajmował się równaniami różniczkowymi, wyjaśnił ruch Księżyca.



Rys. 5 Geodezyjne na walcu.

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza euklidesowy iloczyn skalarny. Załóżmy, że krzywa γ jest sparametryzowana naturalnie. Wprowadzimy teraz pewną rodzinę krzywych na powierzchni S : Jeśli $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ jest dowolną naturalnie sparametryzowaną krzywą, to wariacją (uzmiennieniem) krzywej γ nazywamy takie różniczkowalne odwzorowanie $\alpha: [0, 1] \times [-a, a] \rightarrow S$, że $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ (tzn. jest krzywą γ) oraz dla dowolnego $s \in [-a, a]$ jest $\alpha(0, s) = \gamma(0)$, $\alpha(1, s) = \gamma(1)$ (tzn. wszystkie krzywe mają wspólne końce). Krzywe $\alpha(s, t)$ są nazywane *wariacjami* γ . Wśród wszystkich krzywych $\alpha(s, t)$ będziemy szukać takiej, której długość jest najmniejsza. W tym celu wykorzystamy twierdzenie Fermata — warunek konieczny istnienia ekstremum. Obliczamy pochodną i przyrównujemy ją do zera

$$\frac{d}{ds} L(\alpha(s, t))_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha(t, s)}{dt}, \frac{d\alpha(t, s)}{dt} \right\rangle} dt \right)_{s=0} = 0$$

i po pewnych rachunkach otrzymujemy $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(0)} \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$. Wobec tego możemy podać

definicję tytułowej *geodezyjnej*: Krzywą γ nazywamy geodezyjną, jeśli spełnia ona powyższe równanie. Jeśli $\gamma(t) = \varphi(k(t), f(t))$, to równanie geodezyjnej jest postaci:

$$\begin{cases} k'' + \Gamma_{11}^1(k')^2 + 2\Gamma_{12}^1 k' f' + \Gamma_{22}^1 (f')^2 = 0 \\ f'' + \Gamma_{11}^2(k')^2 + 2\Gamma_{12}^2 k' f' + \Gamma_{22}^2 (f')^2 = 0. \end{cases}$$

Jako wniosek z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych mamy następujące twierdzenie:

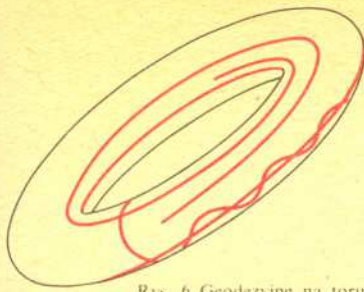
Dla danego punktu $m \in S$ i niezerowego wektora stycznego $v \in T_m S$ istnieje $\varepsilon > 0$ i dokładnie jedna geodezyjna $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ taka, że $\gamma(0) = m$ i $\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = v$. A to znaczy, że przez dany punkt i w danym kierunku możemy wypuścić dokładnie jedną geodezyjną.

Linie geodezyjne na powierzchni grają rolę prostych na płaszczyźnie, tzn. gdy myślimy tylko kategoriami powierzchni i nie możemy np. porównać krzywych z liniami prostymi w E^3 , to geodezyjne są „najprostszymi” z linii, jakie możemy poprowadzić na powierzchni. Gdy wędrujemy po powierzchni wzdłuż linii geodezyjnej, to wydaje się, że kierunek (tu rozumiemy kierunek tak, jak go rozumie dwuwymiarowa istota żyjąca na naszej powierzchni) marszu, czyli kierunek stycznej do krzywej nie zmienia się a więc idziemy prosto. Krzywe geodezyjne możemy w przybliżeniu wyznaczyć na modelach powierzchni — jeśli napiemy na jakiejś powierzchni nierozciągliwą nitkę, to przybierze ona kształt geodezyjnej.

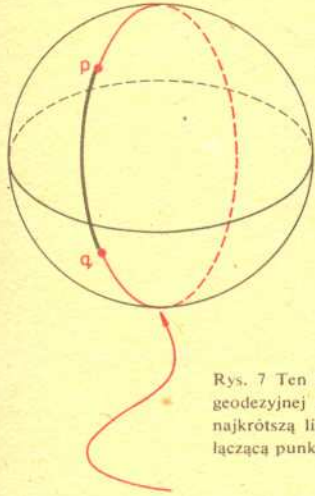
Jeśli mamy daną dowolną krzywą w E^3 , to po obrocie jej wokół osi Oz otrzymamy pewną powierzchnię, którą będziemy nazywali *obrotową*. Taką powierzchnią jest np. torus, sfera, hiperboloida czy paraboloida. Linie otrzymane przez przekroje tych powierzchni płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny Oxy będziemy nazywali *równoleżnikami*, a linie wyznaczone przez płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny Oxy i zawierające oś Oz — *południkami*. Własności geodezyjnych na powierzchniach opisuje **twierdzenie Clairaut'a**:

Na powierzchni obrotowej w każdym punkcie geodezyjnej zachodzi tożsamość $\rho \cos \mu = c$, gdzie ρ jest odległością punktu geodezyjnej od osi Oz , μ jest kątem pomiędzy geodezyjną a równoleżnikiem, $0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$, a c jest stałą liczbą.

Korzystając z twierdzenia Clairaut'a wyznaczmy linie geodezyjne na torusie i na walcu:
1. wałec — niech m będzie dowolnym punktem walca W , a r promieniem równoleżnika L przechodzącego przez punkt m . Rozważmy geodezyjną przechodzącą przez punkt m pod kątem $\mu = 0$ do równoleżnika L . Z twierdzenia Clairaut'a wynika, że $\rho = r$ i $\cos \mu = 1$, czyli w każdym punkcie zachodzi $\mu = 0$ i geodezyjna pokrywa się z równoleżnikiem L . Rozważmy teraz geodezyjną przechodzącą przez punkt m pod kątem $\mu = \pi/2$ do L . Z twierdzenia mamy $\rho \cos \mu = 0$, czyli w każdym punkcie $\mu = \pi/2$ i geodezyjna pokrywa się z południkiem. Niech teraz $0 < \mu < \pi/2$, mamy więc, że $\rho \cos \mu = c$, ale $\rho = r$ w każdym punkcie — wynika stąd, że $\mu = \text{const.}$ w każdym punkcie geodezyjnej. A to znaczy, że geodezyjne to linie spiralne przecinające równoleżniki pod stałym kątem. Są to wszystkie możliwe geodezyjne na walcu. Zauważmy jeszcze jedną ciekawą własność geodezyjnych na walcu: dowolne dwa punkty walca mogą być na ogół połączone nieskończenie wieloma różnymi geodezyjnymi, w odróżnieniu od płaszczyzny, gdzie dwa dowolne punkty możemy połączyć dokładnie jedną prostą.



Rys. 6 Geodezyjne na torusie



Rys. 7 Ten odcinek geodezyjnej nie jest najkrótszą linią łączącą punkty p i q .

2. torus — niech R i r będą promieniami odpowiednio najmniejszego i największego równoleżnika. Podobnie jak wyżej z twierdzenia Clairaut'a wnioskujemy, że geodezyjnymi na torusie są południki, najmniejszy i największy równoleżnik. Niech c będzie promieniem równoleżnika. Jeśli $r < c < R$, to geodezyjna waha się pomiędzy dwoma równoleżnikami o promieniu c mając kształt podobny do sinusoidy. Istnieją także geodezyjne nieskończenie wiele razy zawijające się na torusie, nieograniczenie zbliżające się (z obu stron) do najmniejszego równoleżnika.

Przykład torusa pokazuje, że nie każdy równoleżnik jest geodezyjną, jak to było w przypadku walca. Dlatego tak jest, wyjaśnia następujące twierdzenie: *równoleżnik na powierzchni obrotowej jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowany przez obrót punktu na krzywej tworzącej, w którym styczna do krzywej jest równoległa do osi Oz.*

Zauważmy, że „bycie” geodezyjną jest tylko warunkiem koniecznym minimalności długości linii. Oczywiście (patrz przykład walca) nie każda geodezyjna łącząca dwa dane punkty jest najkrótszą spośród wszystkich krzywych łączących te dwa punkty. Możemy zauważyć, że np. na sferze dwa punkty leżące na pewnym kole wielkim (czyli na geodezyjnej), nicantypodyczne, odcinają dwa odcinki geodezyjnej, większy z nich jest nadal geodezyjną, ale wcale nie jest to najkrótszy odcinek łączący te punkty. Za to ten drugi, krótszy odcinek, też geodezyjny, jest dobry — on to realizuje minimum. Stąd intuicyjny wniosek — być może należy zajmować się małymi odcinkami geodezyjnych. I rzeczywiście można udowodnić twierdzenie, że *spośród wszystkich krzywych łączących dwa dane punkty w dostatecznie małym zbiorze je zawierającym najmniejszą długość ma właśnie geodezyjna*. I w ten sposób nasz problem został rozwiązany.

Patrz w niebo

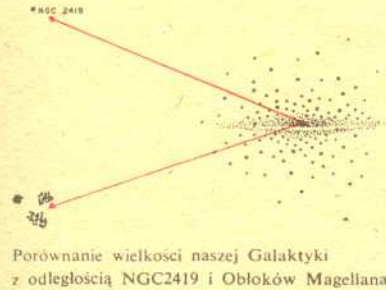
Luty jest miesiącem, w którym piękne zimowe gwiazdozbiory zaczynają coraz wcześniej zachodzić, natomiast charakterystyczne, wiosenne gwiazdozbiory Lwa i Panny są jeszcze nisko nad wschodnim horyzontem. Między nimi — nieciekawe na pierwszy rzut oka lutowe gwiazdozbiory Rysia, Raka i Węża Wodnego. W konstelacji Rysia najjaśniejsza gwiazda jest dopiero trzeciej wielkości gwiazdowej. Jest jednak w tej okolicy przynajmniej jeden obiekt, który zasługuje na uwagę. Zajmiemy się dzisiaj gromadą kulistą NGC 2419. Nazwa, jak zwykle, nic nie mówi. Obiekt ledwo dostrzegalny dopiero przez bardzo dobre lornetki. Jest to tzw. Międzygalaktyczny Włóczęga — najbardziej oddalona od naszej Galaktyki skatalogowana gromada kulista, która jest związana z nią, najprawdopodobniej, siłami grawitacyjnymi, co oznacza, że obiega Galaktykę po orbicie ogromnych rozmiarów. NGC 2419 jest odległa od centrum Drogi Mlecznej o 210 tysięcy lat świetlnych. Jest to odległość większa niż odległość najbliższych niezależnych galaktyk — Obłoków Magellana. Szczegółowe poszukiwania doprowadziły w ostatnich latach do odkrycia wielu bardzo słabych i odległych gromad. Niektóre z nich są niewątpliwie bardziej od nas oddalone niż Obłoki Magellana (oba Obłoki są małymi nieregularnymi galaktykami okrążającymi naszą, dużą Drogę Mleczną). Rodzą się tu duże wątpliwości, czy niektóre z gromad nie są zupełnie niezależnymi, samotnie biegnącymi przez przestrzeń obiektami. Obecnie znamy ok. 100 gromad kulistych należących do naszej Galaktyki (*Patrz w niebo* 6/1979). Ogromna większość zawarta jest w kuli o promieniu ok. 65 tysięcy lat świetlnych i środkiem w Centrum Galaktyki.

Odpowiedz na pytanie, czy istnieją samotne gromady kuliste o zdecydowanie mniejszych masach niż masy galaktyk (największe z gromad nie różnią się wiele swoją strukturą od małych galaktyk eliptycznych) miałyby duże znaczenie dla kosmologów i teoretyków, którzy zajmują się ewolucją galaktyk. Powstałoby oczywiście pytanie — skąd takie obiekty się wzięły — czy powstały jednocześnie z galaktykami (lub wcześniej) i nie wszystkie zostały złapane przez galaktyki. A może wszystkie gromady przez część przynajmniej swojego życia były członkami jakichś galaktyk, ale niektóre z nich na skutek różnych perturbacji i oddziaływań między galaktykami zostały z nich wyrzucone w głęboką przestrzeń.

Ze względu na stosunkowo niewielkie odległości galaktyk między sobą (w porównaniu do ich własnych rozmiarów) „przekrój czynny” na „zderzenie” ewentualnej samotnej gromady z galaktyką jest stosunkowo duży. Zderzenie takie kończyłoby się przeważnie złapaniem gromady na orbitę wokół galaktyki. Wszystkie te czynniki bardzo komplikują obraz.

Obecnie kosmologowie rozwijają wiele teorii, które tłumaczyłyby powstawanie i wczesną ewolucję takich obiektów jak galaktyki i gromady kuliste. Dotychczas nie stworzono modelu, który byłby wolny od wszelkich zarzutów i wychodził zwycięsko z wszystkich konfrontacji z testami obserwacyjnymi. Na pewno jednak potwierdzenie lub odrzucenie istnienia samotnych gromad będzie miało znaczący wpływ na kształtowanie się naszych poglądów na powstawanie i ewolucję galaktyk i ich oddziaływanie między sobą.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Porównanie wielkości naszej Galaktyki z odległością NGC2419 i Obłoków Magellana

