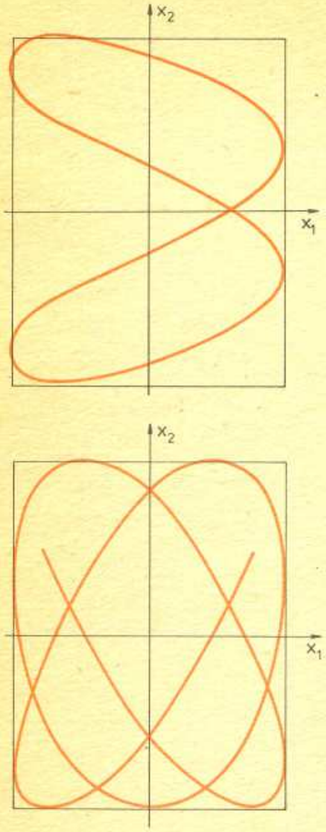


Rys. 3. Figury Lissajous
a) częstości współmierne $\omega_1 = 2\omega_2$
b) częstości niewspółmierne $\omega_1 \approx \omega_2$.

Stała ta nie zależy już od czasu a jedynie od zmiennych fazowych x_1, x_2, p_1, p_2. Jednakże funkcja $\mathrm{arctg}\, x$ jest funkcją wieloznaczną (ma nieskończenie wiele gałęzi oddalonych od siebie o π). Z tego względu funkcja ψ nie reprezentuje sobą określonej powierzchni w przestrzeni fazowej. Wyjątek stanowi przypadek, gdy częstości ω_1 i ω_2 są współmierne, to znaczy, gdy zachodzi związek

$$n\omega_1 = m\omega_2;\ n, m \text{ całkowite.}$$

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi. My ograniczymy się jedynie do spojrzenia na fizykę tego faktu. Przypomnijmy sobie doświadczenie z *figurami Lissajous*. Obserwujemy w nim ruch dwuwymiarowego oscylatora. Zupełnie inny jest tor cząstki, gdy częstości są współmierne niż gdy są niewspółmierne. W pierwszym przypadku ruch układu odbywa się po krzywej zamkniętej (na przykład na rys. 3a przedstawiona jest figura Lissajous dla $\omega_1 = 2\omega_2$). W drugim natomiast omawiana krzywa nie zamyka się, a co więcej, po odpowiednio długim czasie przejdzie dowolnie blisko dowolnego punktu należącego do dostępnego (ograniczonego przez energię) prostokąta leżącego na płaszczyźnie (x_1, x_2). Związek figur Lissajous z ruchem dwuwymiarowego oscylatora w przestrzeni fazowej stanie się całkiem jasny, gdy uświadomimy sobie, że całki energii można wykorzystać do wyeliminowania zmiennych pędowych. Wtedy dostępna dla układu przestrzeń fazowa może być utożsamiona z prostokątem na płaszczyźnie (x_1, x_2). Tak więc własności figur Lissajous potwierdzają fakt, że dla częstości niewspółmiernych nie istnieje dodatkowa powierzchnia ograniczająca ruch układu. Oznacza to, że całka ruchu ψ nie jest rozdzielająca.

Widzieliśmy więc, że istnieją stałe ruchu o różnych własnościach i w związku z tym różnej przydatności do analizy ruchu. Oczywiście dla całkowitego rozwiązania problemu konieczna jest znajomość wszystkich całek pierwszych (to znaczy znajomość rozwiązań równań (1)). W wielu jednak przypadkach rozważany układ jest tak złożony, że nie mamy co marzyć o rozwiązaniu. Równie często znajomość rozwiązania nie wniosłaby niczego do naszej wiedzy o układzie. Na przykład jaką wartość może mieć dla nas informacja, że w litrze gazu w chwili $t = t_1$ cząstka N° 2845715 znajduje się w punkcie x_1 i ma pęd p_1? Potrzebne nam są wtedy charakterystyki globalne, a nie informacje szczegółowe. Wtedy całki rozdzielające odgrywają bardzo istotną rolę.

Zadania

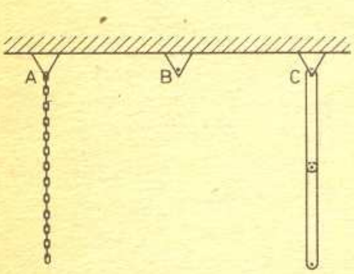
Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 247. Znaleźć wszystkie pary kolejnych liczb naturalnych, z których jedna jest potęgą dwójki a druga potęgą trójki.
Rozwiązanie na str. 7

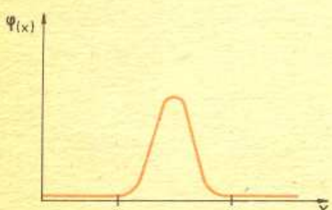
M 248. Wykazać, że jeżeli równanie $p(x) = ax^2+bx+c = x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, to również równanie $p(p(x)) = a(p(x))^2+bp(x)+c = x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 3

M 249. Łamana zamknięta $L = A_1A_2 \dots A_n$ ma wszystkie wierzchołki różne a wszystkie jej boki mają długość 1. Wykazać, że jeżeli średnica L jest równa 1, to n jest nieparzyste.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ



F 86. Z punktów A i C zwisają swobodnie: łańcuch oraz pręty połączone ze sobą w sposób przegubowy (patrz rysunek). Wiszące ciała są jednorodne, mają identyczne masy oraz długości. Dolne końce ciał przenosi się do punktu B ($AB = BC$). Zaniedbując tarcie rozstrzygnąć: w którym przypadku należało wykonać mniejszą pracę?
Rozwiązanie na str. 7.



F 87. Elektron i pozyton przelatują przez pole elektrostatyczne, poruszając się wzdłuż prostej (osi „x”). Potencjał pola dany jest wykresem przedstawionym na rysunku. Która cząstka szybciej pokona odcinek AB, jeśli ich prędkości początkowe są równe? Cząstki należy traktować jako obiekty klasyczne.
Rozwiązanie na str. 2.