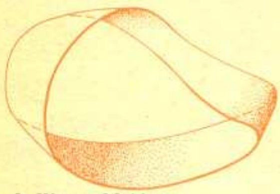
Powierzchnie

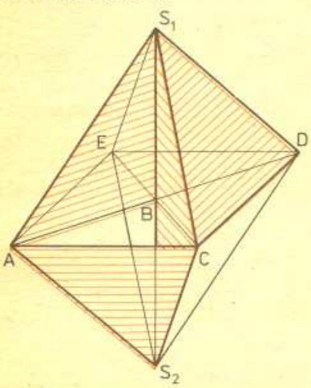
Dr Juliusz OLĘDZKI

Rys. 1. Powierzchnia rodzaju 3.

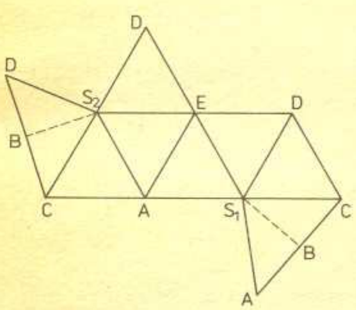
Rys. 2.



Rys. 3. Wstęga Möbiusa.



Rys. 4a. Model B. Tuckermana wstęgi Möbiusa o płaskim brzegu: wstęga składa się z sześciu ścian ośmiościanu i czterech trójkątów prostokątnych; jej brzegiem jest trójkąt *ABC*.

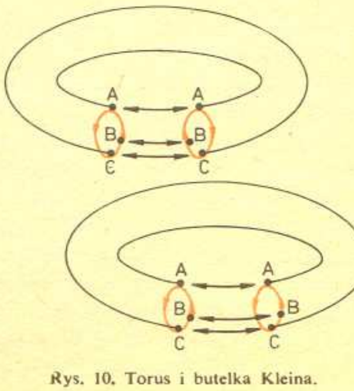


Rys. 4b. Jej siatka.

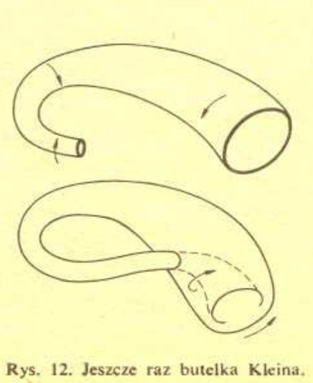
Przez powierzchnię, w szeroko rozumianym, potocznym tego słowa znaczeniu, rozumiemy zbiór dwuwymiarowy oddzielający jedną substancję od innych. Mówimy o powierzchni kuli ziemskiej, mówimy, że powierzchnia wody w naczyniu jest wklęsła lub wypukła, że powierzchnia marmurowej rzeźby jest gładka itp. W niniejszym artykule przedstawimy co rozumiemy przez powierzchnie w topologii i jakie mamy ich rodzaje. Przekształcenie ustalające wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami dwóch zbiorów (dokładniej: przestrzeni metrycznych czy ogólniej topologicznych) tak, by przyporządkowanie punktom jednego zbioru punktów drugiego, a także odwrotne — punktom drugiego zbioru punktów pierwszego, było ciągłe, nazywamy *homeomorfizmem*, a zbiory *homeomorficznymi*. W topologii nie odróżniamy zbiorów homeomorficznych. Na przykład koło jest homeomorficzne z czworokątem; wyobraźmy sobie koło zrobione z elastycznej gumy, po złapaniu go za cztery punkty brzegu i naciągnięciu otrzymujemy czworokąt. Zbiór homeomorficzny z okręgiem nazywamy krzywą zwykłą zamkniętą.

Idealnie płaska powierzchnia morza jest homeomorficzna z pofalowaną, o ile tylko fale nie są tak wzburzone, że krople wody odrywają się od powierzchni lub gdy załamane fale swymi wierzchołkami wcześniej uderzają w powierzchnię tworząc przez chwilę tunele.
W topologii przyjmuje się następującą definicję powierzchni; *powierzchnią nazywamy domknięty* (wraz z ciągiem zbieżnym punktów do zbioru należy jego granica) *i ograniczony* (odległości między punktami zbioru są mniejsze od ustalonej liczby) *zbiór, którego każdy punkt ma w tym zbiorze otoczenie homeomorficzne z otwartym* (bez ograniczającego okręgu) *kołem na płaszczyźnie, przy czym każde dwa punkty tego zbioru dają się połączyć krzywą leżącą w zbiorze* (powierzchnia nie może składać się z osobnych części). Przykładami powierzchni są: sfera, czyli powierzchnia kuli, powierzchnia torusa — zbiór zakreślony przez obracający się okrąg wokół prostej leżącej w tej samej płaszczyźnie co okrąg lecz nie przecinającej go, powierzchnia torusa z większą liczbą dziur (rys. 1).
W myśl tej definicji powierzchniami nie są: płaszczyzna, gdyż nie jest ograniczona, sfera z usuniętym jednym punktem (gdyż nie jest domknięta), otwarte koło, domknięte koło (bo jego punkty brzegowe nie mają otoczeń homeomorficznych z kołami otwartymi). Ostatni z wymienionych przykładów jest tylko powierzchnią z brzegiem. Dokładniej, mówimy, że *zbiór X jest powierzchnią z brzegiem, jeśli pewne jego punkty mają otoczenia homeomorficzne z otwartymi kołami* (tak jak punkty powierzchni), *a wszystkie inne* (zwane punktami brzegowymi) *mają otoczenia homeomorficzne z połową otwartego koła wraz z „brzegowym" łukiem* (rys. 2); *zakładamy również, że X jest domknięte i ograniczone oraz, że każde dwa punkty z X można połączyć krzywą.* Oto inne przykłady powierzchni z brzegiem: domknięta i ograniczona powierzchnia boczna walca (pasek papieru nawinięty na walec i sklejony), wstęga Möbiusa, (pasek papieru przed sklejeniem przekręcony, rys. 3). Skręcenie przed sklejeniem paska parzystą liczbę razy o 180° daje zbiór homeomorficzny z powierzchnią walca, natomiast nieparzystą — ze wstęgą Möbiusa. Wstęga Möbiusa ma tę własność, że poruszając się po niej bez zbliżania się do brzegu możemy przejść na jej „drugą stronę", w związku z tym właściwie jest to ta sama strona. Powierzchnie o tej własności nazywamy jednostronnymi. Takie powierzchnie (bez brzegu) nie mogą oddzielać jednej substancji od drugiej; okazuje się, że można je zrealizować (tj. umieścić) dopiero w przestrzeni euklidesowej czterowymiarowej (mieszcząca się w trójwymiarowej przestrzeni wstęga Möbiusa nie jest powierzchnią, tylko powierzchnią z brzegiem).

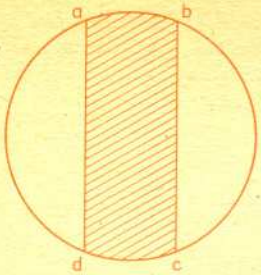
Brzeg wstęgi Möbiusa jest krzywą zwykłą zamkniętą, a więc homeomorficzną z okręgiem. Na rys. 4 widzimy wstęgę Möbiusa o trójkątnym brzegu.



Rys. 10. Torus i butelka Kleina.

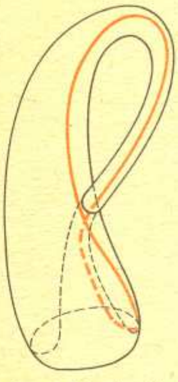


Rys. 12. Jeszcze raz butelka Kleina.

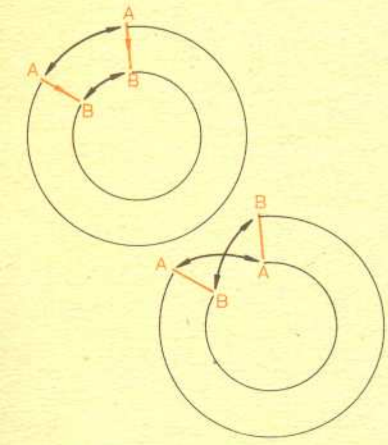


Rys. 5

Prosimy zajrzeć jednak na str. 16, do kącika „Czytelniczki proponują”.

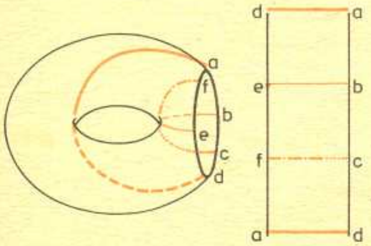


Rys. 6. Butelka Kleina



Rys. 9. Pasek i wstęga Möbiusa.

Rys. 7. Sfera z trzema rączkami to to samo co torus z trzema otworami z rys. 1.



Rys. 8

Powierzchnię jednostronną bez brzegu można otrzymać z koła przez sklejenie (utożsamienie) punktów antypodycznych (tj. symetrycznych względem środka) na okręgu będącym brzegiem tego koła. Powierzchnię taką nazywamy płaszczyzną rzutową. Jeżeli podzielimy płaszczyznę rzutową krzywą zwykłą zamkniętą na dwie części tak jak na rys. 5, to otrzymamy część zakreskowaną homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa (łuk *ab* jest sklejony z *cd*) i część niezakreskowaną homeomorficzną z kołem (łuk *bc* jest sklejony z *da*). Możemy więc powiedzieć, że płaszczyzna rzutowa powstaje przez dolepienie do koła wstęgi Möbiusa. Innym klasycznym przykładem powierzchni jednostronnej jest butelka Kleina (rys. 6). Oczywiście przeniknięcie szyjki butelki do wewnątrz bez przecinania ścianki nie jest możliwe w przestrzeni trójwymiarowej. Jeżeli rozetniemy butelkę Kleina wzdłuż okręgu leżącego na dnie butelki, to otrzymamy powierzchnię walca, tak samo jak byśmy rozcięli powierzchnię torusa. Tak więc doklejając na różne sposoby okręgi będące podstawami powierzchni bocznej walca możemy uzyskać różne powierzchnie; raz jednostronną, raz dwustronną.

Z powierzchni jednostronnej można zawsze wyciąć wstęgę Möbiusa np. poszerzając do paska drogę potrzebną do przejścia na „drugą stronę” ustalonego punktu powierzchni. Jeśli zaś przetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż linii środkowej, to otrzymamy powierzchnię boczną walca. Jeżeli nasza wstęga była zawarta w pewnej powierzchni, to powyższe rozcięcie nie spowoduje rozdzielenia powierzchni na dwie osobne części.

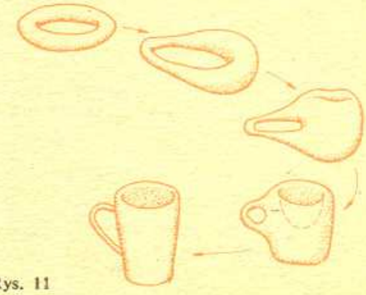
Rodzajem powierzchni nazywamy maksymalną liczbę zawartych w niej rozłącznych krzywych zamkniętych takich, że rozcięcie wzdłuż tych krzywych nie powoduje rozpadnięcia się powierzchni na osobne części.

Sfera jest rodzaju 0, gdyż każda krzywa zwykła zamknięta rozcina ją na dwa zbiory homeomorficzne z kołem (ten pozornie oczywisty fakt nie jest łatwy do dowodu). Powierzchnia torusa jest rodzaju 1; przez przecięcie wzdłuż odpowiednio położonego okręgu otrzymamy powierzchnię boczną walca, która jest już rozcinana przez każdą następną krzywą zwykłą zamkniętą. Czy wobec tego rodzaj butelki Kleina też wynosi 1? Nie, jest on równy 2. Jeśli przecięcie pierwszą krzywą zwykłą zamkniętą doprowadzi do powierzchni walca, to następnej krzywej nie ma gdzie umieścić. Ale pewne krzywe zwykłe zamknięte przecinają butelkę Kleina tak, że otrzymujemy wstęgę Möbiusa (linia pomarańczowa na rys. 6), a więc i druga krzywa zwykła zamknięta nie rozcina całkowicie powierzchni.

Bezpośrednio z definicji wynika, że rodzaj powierzchni oraz to, czy jest ona jedno- czy dwustronna, nie zmienia się przy homeomorfizmie. Okazuje się (dowód nie jest prosty), że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

Jeśli dwie powierzchnie są tego samego rodzaju i obie są jedno- lub obie dwustronne, to są homeomorficzne.

A zatem rodzaj powierzchni plus informacja, czy jest ona jedno- czy dwustronna, określa tę powierzchnię jednoznacznie z topologicznego punktu widzenia.
Powierzchnie dwustronne rodzaju $n \geqslant 0$ można utworzyć dolepiając do sfery n „uch” (rys. 7) i na mocy powyższego twierdzenia innych dwustronnych powierzchni w topologii nie ma. Natomiast powierzchnię jednostronną rodzaju $2n+1$ można skonstruować wycinając w sferze n kół i doklejając wzdłuż brzegów n wstęg Möbiusa (brzeg wstęgi Möbiusa jest krzywą zwykłą zamkniętą). Jaką powierzchnię otrzymamy doklejając do sfery jedno ucho i jedną wstęgę Möbiusa? Będzie to powierzchnia jednostronna rodzaju 3. Doklejenie jednego ucha jest topologicznie tym samym, co doklejenie dwóch wstęg Möbiusa, ale pod warunkiem, że powierzchnia zawiera jeszcze inną wstęgę (rys. 8). Tak więc powierzchnię jednostronną rodzaju n można również otrzymać doklejając do sfery, dla n nieparzystego, jedną wstęgę Möbiusa i $\frac{n-1}{2}$ uch, a dla n parzystego, dwie wstęgi Möbiusa i $\frac{n-2}{2}$ uch. Rys. 8 pokazuje jak sferę z jednym uchem i jedną wstęgą Möbiusa można rozciąć na trzy wstęgi Möbiusa.



Rys. 11