



Na różnych lekcjach  
Z różnych książek  
Od różnych ludzi  
Dowiadujemy się wielu ciekawych rzeczy

Zdobywamy informacje  
„z matematyki”, „z biologii”, „z historii”, „z geografii”,  
„z języka polskiego”, „z astronomii”, „z fizyki”, „z chemii”  
i wiele takich  
których nie umiemy w ten sposób sklasyfikować  
a które wcale nie mniej nas ciekawią

I z tych informacji powstaje  
nasza wiedza o świecie  
który jest JEDEN  
i na żadne przedmioty, dyscypliny czy nauki  
NIE JEST PODZIELONY

Nie znaczy to  
że nie musimy uczyć się dzielenia informacji

Musimy mianowicie  
umieć podzielić uzyskiwane informacje  
na PRAWDZIWE i NIEPRAWDZIWE  
bo bez tej umiejętności  
nie będziemy wiedzieli zupełnie nic

Nabycia wprawy w takim dzieleniu  
Życzy Wam

DELTA

## Powierzchnie stałych ruchu w dynamice

Doc. dr Antoni KUSZELL

Rozważmy ruch układu dynamicznego opisywanego równaniami ruchu Newtona w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_j &= p_j \\ \frac{d}{dt} p_j &= F_j; \quad j = 1, \dots, f; \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $x_j$ ,  $p_j$  i  $F_j$  oznaczają odpowiednio  $j$ -tą składową położenia, pędu i siły,  $f$  zaś oznacza liczbę stopni swobody. Na przykład w trójwymiarowej przestrzeni ruch punktu materialnego (cząstki) jest opisany w pełni przez podanie trójwymiarowych wektorów położenia i pędu w każdej chwili czasu  $t$ . To znaczy, że w tym przypadku  $f = 3$ . Podobnie dla układu dwóch cząstek punktowych liczba stopni swobody  $f = 6$ , itd.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że siły  $F_j$  są potencjalne. Oznacza to, że istnieje funkcja zmiennych przestrzennych  $V(x_1, \dots, x_f)$ , zwana potencjałem, dla której zachodzi związek:

$$F_j = - \frac{\partial}{\partial x_j} V; \quad j = 1, \dots, f.$$

Ruch układu dynamicznego można także opisywać w przestrzeni położeniowej ( $f$ -wymiarowej). Trajektoria jest wtedy rozwiązaniem równania Newtona drugiego rzędu

$$\frac{d^2}{dt^2} x_j = F_j; \quad j = 1, \dots, f.$$

Przez każdy punkt w przestrzeni położeniowej przechodzi nieskończenie wiele trajektorii odpowiadających różnym prędkościom w tym punkcie. W przestrzeni fazowej przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna trajektoria. Wyjątkiem są punkty równowagi niestabilnej.

Jak wiadomo z teorii równań różniczkowych (jest to zresztą fizycznie oczywiste) równania (1) uzupełnione odpowiednimi warunkami początkowymi wyznaczają w sposób jednoznaczny rozwiązanie zwane *trajektorią* (torem) układu. Jednakże rozwiązanie to jest znane w postaci analitycznej jedynie w niewielu prostych przypadkach. Dlatego tak ważna jest możliwość uzyskania informacji o ruchu bez konieczności znajdowania trajektorii. W tym celu możemy posłużyć się tzw. *całkami ruchu* oraz analizą geometrii ruchu w *przestrzeni fazowej*. Przestrzenia fazową nazywać będziemy  $2f$ -wymiarową przestrzeń położeni i pędów. Na przykład przestrzeń fazowa układu składającego się z jednej cząstki punktowej jest sześciowymiarowa. Trajektoria układu jest krzywą w przestrzeni fazowej, parametryzowaną czasem  $t$ . Łatwo można się przekonać, że dla ustalonych warunków początkowych trajektoria nie może przechodzić przez wszystkie punkty przestrzeni fazowej; są punkty niedostępne dla układu. Wynika to z istnienia wielkości fizycznych, które nie zmieniają się w trakcie ewolucji (ruchu). Do wielkości takich (o ile siły są potencjalne) należy całkowita energia układu

$$E = \sum_{j=1}^f \frac{p_j^2}{2m_j} + \Phi,$$

gdzie  $\Phi$  jest energią potencjalną.

Równanie  $E = E_0 = \text{const.}$  wyznacza  $2f-1$  wymiarową powierzchnię w przestrzeni fazowej. Warunek zachowania energii oznacza geometrycznie prosty fakt, że trajektoria układu leży na powierzchni stałej energii. Tak więc ze względu na tę zasadę zachowania dostępny obszar jest  $2f-1$  wymiarowy.

Widać stąd jak ważne jest pytanie, czy istnieją inne, niezależne powierzchnie, na których musi leżeć trajektoria. Dla prostoty przyjmijmy na chwilę, że układ nasz składa się z  $n$  cząstek w przestrzeni trójwymiarowej. Wtedy  $f = 3n$ .

Przyjmijmy ponadto, że jest on izolowany, czyli na cząstki nie działa żadna siła zewnętrzna. Wtedy, jak łatwo wykazać, środek masy układu  $X$  określony wzorem:

$$X = M^{-1} \sum_{s=1}^n m_s x_s$$

$$\left( M = \sum_{s=1}^n m_s \text{ oznacza całkowitą masę układu} \right)$$

porusza się ruchem jednostajnym

$$X = X_0 + V_0 t.$$

We wzorze tym wielkości wektorowe  $X_0$  oraz  $V_0$  są stałe (warunki początkowe), które podobnie jak energia mogą być traktowane jako stałe ruchu. Wprowadzają one sześć nowych ograniczeń (w tym przypadku płaszczyzn). Tak więc obszar przestrzeni fazowej dostępny dla układu izolowanego i potencjalnego ma  $2f-7$  wymiarów. Dalsze ograniczenie tego obszaru możemy uzyskać nakładając warunki na siły  $F_j$ . Załóżmy mianowicie, że są one centralne, co oznacza, że zależą jedynie od odległości między cząstkami i są skierowane wzdłuż wektora łączącego te cząstki (mogą być przy tym odpychające bądź przyciągające). Dla układu oddziaływującego takimi siłami znamy dodatkową wektorową stałą ruchu (lub jeśli ktoś woli, trzy stałe skalarnie); a mianowicie całkowity moment pędu:

$$M = \sum_{s=1}^n x_s \times p_s,$$

gdzie znak  $\times$  oznacza iloczyn wektorowy.

Łącznie mamy więc do dyspozycji dziesięć ogólnych stałych ruchu (zwanymi *całkami pierwszymi* równań ruchu). Mają one dwie wyróżniające cechy. Po pierwsze są związane z niezmienniczościami układu. Związek ten jest treścią bardzo głębokiego twierdzenia, zwanego *twierdzeniem Noether*, zgodnie z którym niezmienniczości względem przesunięcia w czasie (ruch) odpowiada stałość energii, niezmienniczości względem transformacji Galileusza odpowiadają stałe ruchy środka masy, a niezmienniczości względem obrotu całego układu — stałość momentu pędu. Po drugie, są to prawdopodobnie jedyne *całki rozdzielające* tj. takie, które wyznaczają powierzchnie w przestrzeni fazowej. Dowód tego faktu nie jest jednak znany. Jest to ważny problem, ponieważ znajomość maksymalnej ilości całek rozdzielających pozwala wyznaczyć dostępny w trakcie ewolucji obszar przestrzeni fazowej.

Zauważmy, że układ równań (1) ma dokładnie  $2f$  stałych całkowania, które są stałymi ruchu. Już dla  $f = 6$  (np. dwie cząstki w przestrzeni trójwymiarowej) liczba tych stałych jest większa niż liczba opisanych wyżej całek rozdzielających. Dla lepszego zrozumienia sytuacji rozważmy kilka bardzo prostych układów dynamicznych.

Na początek zajmijmy się układami jednowymiarowymi (np. cząstka poruszająca się po prostej). Przestrzeń fazowa jest wtedy dwuwymiarowa. Ruch w przestrzeni fazowej odbywa się po powierzchni jednowymiarowej (krzywej), wobec czego może istnieć tylko jedna całka rozdzielająca. Na to, by przykład nie był trywialny, cząstka musi oddziaływać z siłami



**Rozwiązanie zadania F 87.** Cząstki występujące w zadaniu, różnią się jedynie znakiem ładunku. Energie potencjalne w polu elektrostatycznym o potencjale  $\varphi(x)$  wynoszą:

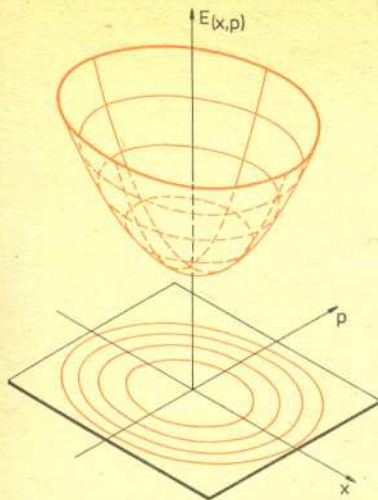
$$F_p = \pm e\varphi(x).$$

Znak „+” dotyczy pozytonu, „-” elektronu,  $e$  jest ładunkiem elementarnym. Stąd wniosek, że elektron jest na początku przyspieszany, a potem hamowany, zaś pozyton na odwrót. I chociaż prędkości obu cząstek przed wejściem i po wyjściu (zasada zachowania energii) z obszaru pola są takie same, to w obrębie pola zmieniają się one w różny sposób. Prędkość elektronu jest tu zawsze większa, pozytonu zaś zawsze mniejsza od prędkości początkowej. Oznacza to, że elektron musi (przy równych prędkościach początkowych) szybciej pokonać odcinek AB. Wynik ten nie zależy od postaci funkcji  $\varphi(x)$ . Zauważmy na koniec, że początkowa prędkość cząstek nie może być zbyt mała. Dlaczego?

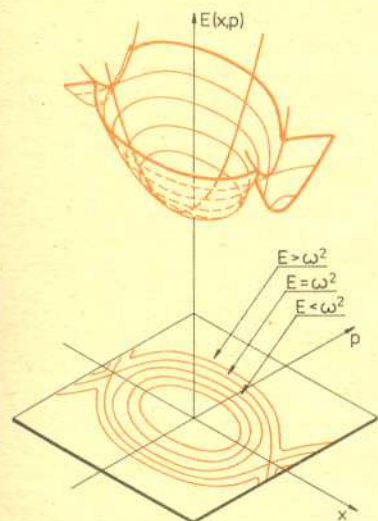
Transformacja Galileusza opisuje zmianę współrzędnych punktu przy przejściu od inercjalnego układu odniesienia do układu poruszającego się względem niego ze stałą prędkością. Jeśli  $x$  opisuje położenie punktu w starym układzie, to w nowym jego położenie opisane będzie wektorem

$$x' = x - V \cdot t,$$

gdzie  $V$  jest prędkością względną układów. Czas w obu układach płynie tak samo. Jest to transformacja nierelatywistyczna tj. zakres jej stosowności jest ograniczony do prędkości dużo mniejszych od prędkości światła.



Rys. 1. Powierzchnia energii i krzywe izoenergetyczne oscylatora harmonicznego.



Rys. 2. Powierzchnia energii i krzywe izoenergetyczne dla wahadła fizycznego.

zewnątrznymi. Dlatego też całki środka masy nie są przydatne. Podobnie przy jednym wymiarze nie można mówić o obrotach. Wobec tego pozostaje tylko całka energii, która wyznacza trajektorię. Rozważmy kilka przypadków szczególnych.

1. Oscylator harmoniczny o masie  $m = 1$ .

Równanie ruchu oscylatora ma postać

$$\frac{d}{dt} p = -\omega^2 x; \quad \frac{d}{dt} x = p,$$

energia zaś może być zapisana w postaci

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2.$$

Ostatnie równanie opisuje, w przestrzeni  $(E, x, p)$  paraboloidę eliptyczną. Rzuty jej przecięć z płaszczyznami  $E = E_0 = \text{const.}$  na przestrzeń fazową (płaszczyznę  $E = 0$ ) są powierzchniami rozdzielającymi. Mają one postać współosiowych elips (porównaj rys. 1).

2. Wahadło fizyczne o masie  $m = 1$ .

Wahadło fizyczne opisywane jest układem równań w postaci

$$\frac{d}{dt} x = p, \quad \frac{d}{dt} p = -\omega^2 \sin x,$$

energię zaś można zapisać następująco:

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \omega^2 (1 - \cos x).$$

Powierzchnia energii ma teraz postać dużo bardziej złożoną. Po pierwsze  $x$  oznacza tutaj kąt wychylenia wahadła i powinno być zawarte w przedziale  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Dla prostoty graficznej rozważmy jednak tę powierzchnię w całym zakresie zmienności  $(-\infty, \infty)$ . Wykres interpretować będziemy (jak to mówią matematycy) modulo  $2\pi$ , to znaczy będziemy utożsamiać punkty odległe o  $2n\pi$  z punktami przedziału podstawowego. Tak więc przecięcie powierzchni energii z płaszczyzną  $p = 0$  jest cosinusoidą, a przecięcie z płaszczyzną  $x = 0$  parabolą. Przecięcia z płaszczyznami stałej energii mają bardziej skomplikowaną postać. Dla energii  $E < \omega^2$ , obraz jest podobny do obrazu w przypadku oscylatora. Krzywa odpowiadająca energii  $E = \omega^2$  zwana jest *separatryszą*. Ma ona bardzo ciekawe własności. Po pierwsze oddziela obszar ruchów oscylacyjnych od obrotów. Po drugie zawiera punkty przecięcia dwóch różnych krzywych opisujących oscylacje w różnych kierunkach (rys. 2). Punkt przecięcia odpowiada stanowi równowagi nietrwałej, w górnym położeniu wahadła. Tak więc separatrysa przedstawia sobą trzy różne trajektorie układu, a mianowicie dwie oscylacje i jeden stan stacjonarny (niestabilny). Drugi stan stacjonarny  $x = 0, p = 0$  jest stabilny. Na rys. 2 widzimy wyraźną różnicę między tymi stanami. W otoczeniu punktu stabilnego krzywe stałej energii mają kształt elips (odpowiada to lokalnemu minimum), zaś w otoczeniu punktu niestabilnego kształt hiperbol (odpowiada to punktowi siodłowemu).

Jak widać z omówionych przykładów analiza powierzchni energii mówi bardzo dużo o dynamice układu. Rozważmy teraz prosty układ o dwóch stopniach swobody, a mianowicie dwuwymiarowy oscylator harmoniczny o masie  $m = 1$  opisany równaniami:

$$\frac{d}{dt} x_j = p_j, \quad \frac{d}{dt} p_j = -\omega_j^2 x_j; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Ponieważ ruchy w kierunkach prostopadłych są niezależne, więc energia każdego drgań z osobna jest dobrą stałą ruchu

$$E_j = \frac{1}{2} p_j^2 + \frac{1}{2} \omega_j^2 x_j^2; \quad j = 1, 2.$$

Równania (2) mają bardzo proste rozwiązanie, które można wyrazić następująco:

$$x_j = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad p_j = -A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \varphi_j); \quad j = 1, 2,$$

gdzie  $A_j$  jest *amplitudą*  $j$ -tych drgań a  $\varphi_j$  ich *fazą*. Oczywiście można te cztery wielkości traktować jako stałe ruchu. Amplitudy są bezpośrednio związane z energiami, mamy bowiem związki

$$E_j = \omega_j^2 A_j^2; \quad j = 1, 2,$$

natomiast z fazami sprawa jest bardziej złożona. Możemy łatwo wyrazić  $\varphi_j$  jako funkcje zmiennych fazowych i czasu:

$$\varphi_j = \arctg \left( -\frac{p_j}{\omega_j x_j} \right) - \omega_j t; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Niestety, pomimo, że fazy zachowują stałą wartość w czasie ewolucji układu, to są one zależne od zmiennej czasowej w sposób jawny. Oznacza to, że jeżeli w pewnej chwili czasu  $t_0$  równania

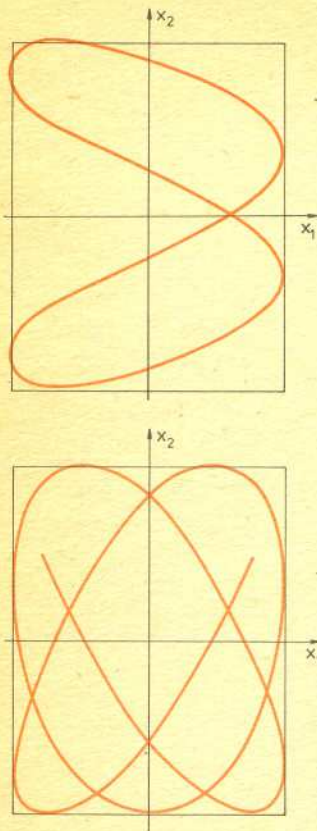
$$\varphi_j(x_j, p_j, t_0) = \varphi_j^0 = \text{const.}$$

wyznaczają powierzchnie w przestrzeni fazowej, to powierzchnie takie nie mogą pozostawać niezmiennione w czasie ewolucji. Ze stałych ruchu określonych wyrażeniem (3) można jednak skonstruować jedną stałą postaci

$$\psi = \omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2.$$



**Rozwiązanie zadania M 248.** Ponieważ trójmian  $p(x) - x$  nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc funkcja  $p(x) - x$  zachowuje stały znak. Niech np.  $p(x) - x > 0$  dla każdego rzeczywistego  $x$ . Kładąc teraz  $x = p(t)$  dla dowolnego  $t$  otrzymamy:  $p(p(t)) > p(t)$ , a ponieważ  $p(t) > t$ , więc  $p(p(t)) > t$  czyli  $p(p(t)) - t > 0$ .



Rys. 3. Figury Lissajous  
 a) częstotliwości współmierne  $\omega_1 = 2\omega_2$   
 b) częstotliwości niewspółmierne  $\omega_1 \approx \omega_2$ .

Stała ta nie zależy już od czasu a jedynie od zmiennych fazowych  $x_1, x_2, p_1, p_2$ . Jednakże funkcja  $\arctg x$  jest funkcją wieloznaczną (ma nieskończenie wiele gałęzi oddalonych od siebie o  $\pi$ ). Z tego względu funkcja  $\psi$  nie reprezentuje sobą określonej powierzchni w przestrzeni fazowej. Wyjątek stanowi przypadek, gdy częstotliwości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są współmierne, to znaczy, gdy zachodzi związek

$$n\omega_1 = m\omega_2; n, m \text{ całkowite.}$$

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi. My ograniczymy się jedynie do spojrzenia na fizykę tego faktu. Przypomnijmy sobie doświadczenie z figurami Lissajous. Obserwujemy w nim ruch dwuwymiarowego oscylatora. Zupełnie inny jest tor cząstki, gdy częstotliwości są współmierne niż gdy są niewspółmierne. W pierwszym przypadku ruch układu odbywa się po krzywej zamkniętej (na przykład na rys. 3a przedstawiona jest figura Lissajous dla  $\omega_1 = 2\omega_2$ ). W drugim natomiast omawiana krzywa nie zamyka się, a co więcej, po odpowiednio długim czasie przejdzie dowolnie blisko dowolnego punktu należącego do dostępnego (ograniczonego przez energię) prostokąta leżącego na płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$ . Związek figur Lissajous z ruchem dwuwymiarowego oscylatora w przestrzeni fazowej stanie się całkiem jasny, gdy uświadomimy sobie, że całki energii można wykorzystać do wyeliminowania zmiennych pędowych. Wtedy dostępna dla układu przestrzeń fazowa może być utożsamiona z prostokątem na płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$ . Tak więc własności figur Lissajous potwierdzają fakt, że dla częstotliwości niewspółmiernych nie istnieje dodatkowa powierzchnia ograniczająca ruch układu. Oznacza to, że całka ruchu  $\psi$  nie jest rozdzielająca.

Widzieliśmy więc, że istnieją stałe ruchu o różnych własnościach i w związku z tym różnej przydatności do analizy ruchu. Oczywiście dla całkowitego rozwiązania problemu konieczna jest znajomość wszystkich całek pierwszych (to znaczy znajomość rozwiązań równań (1)). W wielu jednak przypadkach rozważany układ jest tak złożony, że nie mamy co marzyć o rozwiązaniu. Równie często znajomość rozwiązania nie wnosiłaby niczego do naszej wiedzy o układzie. Na przykład jaką wartość może mieć dla nas informacja, że w litrze gazu w chwili  $t = t_1$  cząstka N° 2845715 znajduje się w punkcie  $x_1$  i ma pęd  $p_1$ ? Potrzebne nam są wtedy charakterystyki globalne, a nie informacje szczegółowe. Wtedy całki rozdzielające odgrywają bardzo istotną rolę.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 247.** Znaleźć wszystkie pary kolejnych liczb naturalnych, z których jedna jest potęgą dwójki a druga potęgą trójki.

Rozwiązanie na str. 7

**M 248.** Wykazać, że jeżeli równanie  $p(x) = ax^2 + bx + c = x$  nie ma pierwiastków rzeczywistych, to również równanie  $p(p(x)) = a(p(x))^2 + bp(x) + c = x$  nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 3

**M 249.** Łamana zamknięta  $L = A_1 A_2 \dots A_n$  ma wszystkie wierzchołki różne a wszystkie jej boki mają długość 1. Wykazać, że jeżeli średnica  $\bar{L}$  jest równa 1, to  $n$  jest nieparzyste.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 86.** Z punktów  $A$  i  $C$  zwisają swobodnie: łańcuch oraz pręty połączone ze sobą w sposób przegubowy (patrz rysunek). Wiszące ciała są jednorodne, mają identyczne masy oraz długości. Dolne końce ciał przenosi się do punktu  $B$  ( $AB = BC$ ). Zaniedbując tarcie rozstrzygnąć: w którym przypadku należało wykonać mniejszą pracę?

Rozwiązanie na str. 7.

**F 87.** Elektron i pozyton przelatują przez pole elektrostatyczne, poruszając się wzdłuż prostej (osi „ $x$ ”). Potencjał pola dany jest wykresiem przedstawionym na rysunku. Która cząstka szybciej pokona odcinek  $AB$ , jeśli ich prędkości początkowe są równe? Cząstki należy traktować jako obiekty klasyczne.

Rozwiązanie na str. 2.

