Płaszczyzna rzutowa

Iwona GRZEGORCZYK

Jeżeli do zwykłej płaszczyzny euklidesowej dołączymy ,,punkty w nieskończoności", dostaniemy *płaszczyznę rzutową*. Aby zobaczyć na czym polega i jak przebiega ta konstrukcja, wyobraźmy sobie płaszczyznę H i pęk prostych przechodzących przez pewien punkt poza nią. Każda prosta tego pęku nierównoległa do H przecina ją w jednym punkcie. Otrzymane tak przyporządkowanie

prosta pęku nierównoległa do $H \leftrightarrow$ punkt płaszczyzny H

jest wzajemnie jednoznaczne. Jak to często w matematyce bywa, zbiory, między którymi istnieje ,,naturalna" funkcja wzajemnie jednoznaczna, są utożsamiane. Możemy napisać

(*) punkt płaszczyzny H = prosta pęku nierównoległa do H

i uważać za współrzędne punktu np. wektor kierunkowy odpowiedniej prostej. Oczywiście takie współrzędne punktu (zwiemy je *jednorodnymi* albo *rzutowymi*) zależą, jak i każde inne, od wyboru układu współrzędnych. Gdy za H weźmiemy płaszczyznę $z = 1$, a $p = (0, 0, 0)$, to będą one postaci $[x, y, z]$ i $z = 1$.

Płaszczyznę rzutową określamy jako zbiór *wszystkich* prostych naszego pęku. Przyporządkowanie (*) pokazuje, że dzięki takiemu określeniu do ,,zwykłej" płaszczyzny euklidesowej rzeczywiście doszły nowe punkty i że zasługują one na nazwę ,,punktów w nieskończoności". Każdy taki punkt odpowiada kierunkowi pewnej prostej na płaszczyźnie, a jego współrzędne jednorodne mają postać $[x, y, 0]$. Płaszczyzna rzutowa ma więc dwa rodzaje punktów: *właściwe* (odpowiadające punktom płaszczyzny H; współrzędne jednorodne takich punktów mają trzecią współrzędną różną od zera) i *niewłaściwe* (odpowiadające kierunkom prostych na H). Widzimy także, że proporcjonalne współrzędne jednorodne opisują ten sam punkt płaszczyzny rzutowej. Pozwala to określić płaszczyznę w inny sposób, może mniej intuicyjny, ale lepszy do posługiwania się nią: *Płaszczyzna rzutowa to zbiór trójek* $[x, y, z]$, *wśród których*

1) *nie ma* $[0, 0, 0]$,

2) *trójki proporcjonalne utożsamiamy.*

Przy takim podejściu zaciera się zupełnie różnica między punktami właściwymi i niewłaściwymi. Widzimy ponadto, że trójka $[x, y, z]$ jest tym samym punktem płaszczyzny rzutowej co

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right].$$

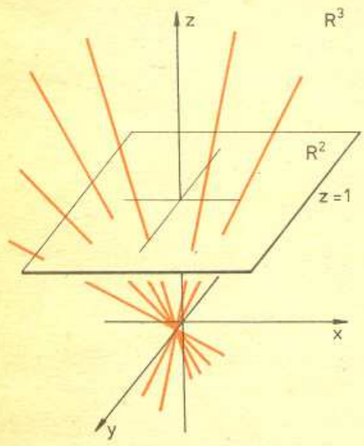
Punkty o analogicznych współrzędnych, ale w przestrzeni euklidesowej, wypełniają sferę o równaniu $x^2+y^2+z^2 = 1$. Jednak dwa antypodyczne (przeciwległe) punkty sfery mają przeciwne współrzędne euklidesowe i wobec tego wyznaczają *ten sam* punkt płaszczyzny rzutowej. Możemy zatem powiedzieć jeszcze inaczej (zob. też artykuł J. Olędzkiego):
Płaszczyznę rzutową można otrzymać ze sfery, utożsamiając na niej punkty leżące na jednej średnicy.

Ta uwaga pozwala na wprowadzenie na płaszczyźnie rzutowej pojęcia odległości (rys. 2), co czyni z niej przestrzeń metryczną, tzw. *płaszczyznę eliptyczną.*

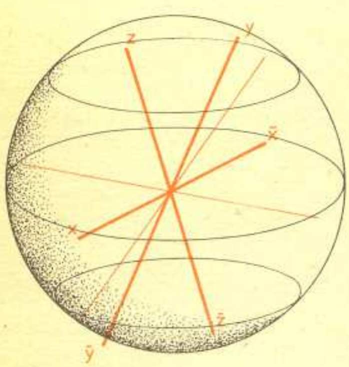
Płaszczyzna euklidesowa jest podzbiorem płaszczyzny rzutowej. Możemy zbiory w niej zawarte domykać w całej płaszczyźnie rzutowej. Choć nie jest to trudne, nie będziemy dokładnie wyjaśniać, dlaczego domknięcie zbioru opisanego na płaszczyźnie euklidesowej równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$ jest na płaszczyźnie rzutowej opisane równaniem $F(x, y, z) = 0$, powstającym przez dopisanie do wszystkich jednomianów w wielomianie f najmniejszej takiej potęgi zmiennej z, by wielomian stał się jednorodny. Tak na przykład domknięcie linii prostej o równaniu $ax+by = c$ ma na płaszczyźnie rzutowej równanie $ax+by = cz$. Gdy położymy $z = 0$, obliczymy jakie punkty ,,w nieskończoności" doszły do naszej prostej: $x = b$, $y = -a$, $z = 0$ (inne układy trójek x, y, z są proporcjonalne do tych).

Otrzymaliśmy coś, co mogliśmy przewidzieć i bez rachunków: domknięcie linii prostej składa się z niej samej i jednego punktu niewłaściwego, odpowiadającego jej kierunkowi. Taka uzupełniona prosta jest homeomorficzna z okręgiem, podczas gdy domknięcie hiperboli składa się z niej samej oraz punktów odpowiadających kierunkom asymptot; przy domykaniu paraboli dojdzie jeden punkt niewłaściwy: kierunek jej osi symetrii.

Teoria krzywych i powierzchni domkniętych w przestrzeniach rzutowych jest — wbrew pozorom — łatwiejsza niż ich części euklidesowych, niezwartych. Tylko dla takich ,,domkniętych" zbiorów możemy jako tako zadowalająco odpowiedzieć na pytanie: jak z postaci wielomianu opisującego zbiór poznać, jak ten zbiór ,,naprawdę" wygląda, czym zajmuje się modna ostatnio geometria algebraiczna.



Rys. 1. Płaszczyzna rzutowa



Rys. 2. Gdy ze sfery robimy przestrzeń rzutową, utożsamiamy punkty przeciwległe: x i $\bar{x}$, y i $\bar{y}$, z i $\bar{z}$. Długość najkrótszego z łuków wielkich $\overset{\frown}{xz}$, $\overset{\frown}{x\bar{z}}$, $\overset{\frown}{\bar{x}z}$, $\overset{\frown}{\bar{x}\bar{z}}$ przyjmujemy za odległość punktów x i z przestrzeni rzutowej.