O krzywiźnie, skręceniu i trójnogu Freneta (II)

Doc. dr Andrzej SZYBIAK

Streszczenie części I

Krzywizna krzywej to odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego. A okrąg *ściśle styczny* w punkcie p to graniczne położenie okręgów przechodzących przez punkty bliskie p. Jest to „najlepiej" styczny ze wszystkich okręgów stycznych do krzywej. Jeżeli C jest krzywą przestrzenną, to *płaszczyzną ściśle styczną* w punkcie p nazywamy graniczne położenie płaszczyzn przechodzących przez punkty bliskie p. Jest to ta płaszczyzna, w której „leżałaby krzywa, gdyby była płaska".
W części II jest mowa o wektorach, które (gdy się dobrze przyjrzeć) sterczą z każdego punktu krzywej.

Opis naturalny krzywej — to taki jej opis parametryczny, że parametr może być interpretowany jako długość łuku od pewnego ustalonego punktu krzywej.

Zajmujemy się w dalszym ciągu krzywą w E^3 opisaną przez odwzorowania naturalne pewnego przedziału L w przestrzeń euklidesową E^3: $x \mapsto (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$. Zakładamy, że w_1, w_2 i w_3 mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu. Gdy h jest małą liczbą, punkty $\boldsymbol{w}(x-h)$, $\boldsymbol{w}(x)$, $\boldsymbol{w}(x+h)$ leżą też blisko siebie. Niech $\boldsymbol{a}(x, h) = \boldsymbol{w}(x) - \boldsymbol{w}(x-h)$, $\boldsymbol{b}(x, h) =$ $= \boldsymbol{w}(x+h) - \boldsymbol{w}(x)$, $\boldsymbol{c}(x, h) = \boldsymbol{w}(x+h) - \boldsymbol{w}(x-h)$.
Oznaczmy przez $q_h(x)$ środek okręgu przechodzącego przez punkty $w(x-h)$, $w(x)$ i $w(x+h)$ a przez $\boldsymbol{r}_h(x)$ wektor $\overrightarrow{w(x)q_h(x)}$. Oczywiście mamy $r_h(x) = |\boldsymbol{r}_h(x)|$ i $\boldsymbol{r}_h(x) \perp \boldsymbol{a}(x, h) \vee \boldsymbol{b}(x, h)$. Wobec tego wektor graniczny $\lim\limits_{h|0} \boldsymbol{r}_h(x)$ będzie prostopadły do wektora $-\boldsymbol{w}'(x) \vee \boldsymbol{w}''(x)$, jak również do wektora $\boldsymbol{w}'(x)$. Wynika stąd, że

Przez $\vee$ autor oznacza iloczyn wektorowy
$h|0$ znaczy „h dąży do zera"

$$\lim_{h|0} \overrightarrow{w(x)q_h(x)} = \lim_{h|0} r_h(x) = \frac{1}{|\boldsymbol{w}''(x)|} N(x),$$

gdzie $N(x)$ oznacza wektor o długości 1 prostopadły do wektorów $\boldsymbol{w}'(x)$ oraz do $-\boldsymbol{w}(x) \vee \boldsymbol{w}''(x)$ i mający zwrot zgodny ze zwrotem wektora $\boldsymbol{w}''(x)$. Wektor $N(x)$ nazywamy *wektorem normalnym* naszej krzywej w punkcie $w(x)$. Wektor normalny i płaszczyzna ściśle styczna krzywej są określone w punktach, w których wektor $\boldsymbol{w}''$ jest niezerowy. Przy tym warunku płaszczyzna ściśle styczna jest rozpięta na wektorach $\boldsymbol{T}(x)$ i $\boldsymbol{N}(x)$.

Stwierdzamy teraz, że środek $q(x) = \lim\limits_{h|0} q_h(x)$ okręgu granicznego jest końcem wektora mającego początek w punkcie $w(x)$ a kierunek i zwrot wyznaczony przez wektor normalny $N(x)$. Długość jego wynosi $|\boldsymbol{w}''(x)|^{-1}$. Okrąg ten istnieje, o ile $\boldsymbol{w}''(x)$ nie jest wektorem zerowym. Okrąg ten nazywa się okręgiem ściśle stycznym do naszej krzywej w jej punkcie $w(x)$. Izolowane punkty krzywej, w których okrąg ściśle styczny nie istnieje, nazywamy jej *punktami wyprostowania*.

Przyjmujemy, że w punktach wyprostowania krzywizna jest równa 0.

Podamy przykład. Weźmy krzywą opisaną odwzorowaniem φ określonym na całej osi liczbowej, takim, że $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} t^3$, $\varphi_3(t) = \frac{1}{5} t^5$. Wektor o składowych $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$, $\varphi_3'(t)$, a więc wektor $\mathbf{e}_1 + \sqrt{2} t^2 \mathbf{e}_2 + t^4 \mathbf{e}_3$, jest styczny do krzywej w punkcie $\varphi(t)$. Aby otrzymać jednostkowy wektor styczny podzielimy go przez jego długość równą $1 + t^4$. A więc jednostkowy wektor styczny, który poprzednio oznaczaliśmy przez $\boldsymbol{w}'(\sigma(t))$ jest równy $(1+t^4)^{-1}\mathbf{e}_1 + \sqrt{2} t^2 (1+t^4)^{-1} \mathbf{e}_2 + t^4 (1+t^4)^{-1} \mathbf{e}_3$.

Obliczymy pochodną odwzorowania $t \to \boldsymbol{w}'(\sigma(t))$. Na podstawie wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t \boldsymbol{w}'(\sigma(x)) = \boldsymbol{w}''(\sigma(t))\sigma'(t).$$

Zaś $\sigma'(t)$, pochodna długości łuku względem parametru t, w naszym przykładzie jest równa $1 + t^4$; wynika to ze wzoru (1) zastosowanego do naszego przykładu. Wyliczamy więc

$$\boldsymbol{w}''(\sigma(t)) = \frac{1}{\sigma'(t)} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t \boldsymbol{w}'(\sigma(x)) = \frac{1}{1+t^4} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t ((1+x^4)^{-1}\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\, x^2(1+x^4)^{-1}\mathbf{e}_2 + x^4(1+x^4)^{-1}\mathbf{e}_3) =$$

$$= \frac{1}{(1+t^4)^3} (-4t^3\mathbf{e}_1 + 2\sqrt{2}\,(t - t^5)\mathbf{e}_2 + 4t^3\mathbf{e}_3).$$

Jedynym punktem wyprostowania tej krzywej jest punkt $\varphi(0) = (0, 0, 0)$. Promień okręgu ściśle stycznego zmierza do nieskończoności, gdy punkt krzywej zmierza do $\varphi(0)$. Płaszczyzna ściśle styczna w tym punkcie jednak istnieje. Jest nią płaszczyzna o równaniu $x_3 = 0$.

równoskrętny = tak samo zorientowany układ wektorów jest ortonormalny, jeżeli wektory te są parami prostopadłe i każdy z nich ma długość 1

reper w E^3 — to ortonormalny układ trzech wektorów

Wróćmy do ogólnych rozważań. W każdym punkcie nie będącym punktem wyprostowania krzywej zaczepiliśmy dwa wektory jednostkowe i wzajemnie prostopadłe: wektor styczny $T(x) = w'(x)$ i wektor normalny $N(x) = \varkappa(x)w''(x)$, przy czym przez $\varkappa(x)$ oznaczyliśmy krzywiznę w punkcie $w(x)$. Oznaczmy przez $B(x)$ iloczyn wektorowy $T(x)\vee N(x)$. Trójka wektorów $[T(x), N(x), B(x)]$ stanowi układ normalny, równoskrętny z ustalonym na początku układem bazowym $[e_1, e_2, e_3]$. Układ ten nazywamy reperem Freneta albo też *trójnogiem Freneta* rozważanej krzywej w danym punkcie. Wykażemy teraz, że wektor $N'(x)$ jest prostopadły do wektora $N(x)$, a wektor $B'(x)$ jest prostopadły do $B(x)$. Istotnie, różniczkując tożsamości $\langle N(x), N(x)\rangle = 1$ i $\langle B(x), B(x)\rangle = 1$ otrzymamy po prostych przekształceniach $\langle B(x), B'(x)\rangle = 0$ i $\langle N(x), N'(x)\rangle = 0$, a więc warunki prostopadłości. Wynika stąd, że koniec wektora $B'(x)$ należy do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $T(x)$ i $N(x)$, a koniec wektora $N'(x)$, do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $B(x)$ i $T(x)$. Możemy więc napisać

$$N'(x) = \alpha(x)T(x)+\tau(x)B(x),$$
$$B'(x) = \gamma(x)T(x)+\eta(x)N(x).$$

Mnożąc skalarnie pierwszą z powyższych równości kolejno przez $T(x)$ i przez $B(x)$ a drugą kolejno przez $T(x)$ i przez $N(x)$ i uwzględniając ortonormalność układu $[T, N, B]$ otrzymamy

$$\alpha(x) = \langle N'(x), T(x)\rangle, \quad \beta(x) = \langle N'(x), B(x)\rangle,$$
$$\gamma(x) = \langle B'(x), T(x)\rangle, \quad \eta(x) = \langle B'(x), N(x)\rangle.$$

Dalej, różniczkując tożsamości $\langle N(x), T(x)\rangle = 0$, $\langle N(x), B(x)\rangle = 0$ i $\langle T(x), B(x)\rangle = 0$ otrzymamy

$$\langle N'(x), T(x)\rangle = -\langle T'(x), N(x)\rangle,$$
$$\langle N'(x), B(x)\rangle = -\langle B'(x), N(x)\rangle,$$
$$\langle B'(x), T(x)\rangle = -\langle T'(x), B(x)\rangle,$$

a stąd

$$\alpha(x) = -\varkappa(x), \quad \eta(x) = -\tau(x), \quad \gamma(x) = 0.$$

Teraz możemy napisać razem otrzymane równości

$$w'(x) = T(x), \quad T'(x) = \varkappa(x)N(x),$$
$$N'(x) = -\varkappa(x)T(x)+\tau(x)B(x), \quad B'(x) = -\tau(x)T(x). \tag{9}$$

Nazywają się one równaniami ruchomego repera Freneta, albo krótko *równaniami Freneta*. Występujący w nich współczynnik $\tau(x)$ nazywa się *skręceniem krzywej* w punkcie $w(x)$. Można go zinterpretować następująco: wektor $B(x)$ jest wektorem o długości 1 prostopadłym do płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie $w(x)$, a wektor $B(x+h)$ takimż wektorem w punkcie $w(x+h)$. Mamy

$$|\tau(x)| = \lim_{h|0} \frac{1}{|h|}|B(x+h)-B(x)|.$$

Licznik powyższego ilorazu różnicowego jest równy $2\sin\frac{\alpha(x,h)}{2}$, gdzie $\alpha(x, h)$ jest kątem między wektorami $B(x+h)$ i $B(x)$. Jest to zarazem kąt między płaszczyznami ściśle stycznymi w punktach $w(x+h)$ i $w(x)$. A więc

$$|\tau(x)| = \lim \frac{2\sin\frac{\alpha(x,h)}{2}}{|h|} = \lim_{h|0} \frac{\alpha(x,h)}{h}.$$

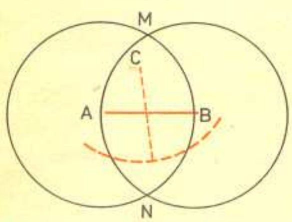
Jeżeli krzywa leży w pewnej płaszczyźnie, to $B(x+h) = B(x)$ stale i wtedy skręcenie znika. Możemy więc powiedzieć, że skręcenie charakteryzuje odchylenie krzywej od płaskości. Stosując wzory na transformację układu współrzędnych nietrudno się przekonać, że postać wzorów (9) nie ulegnie zmianie, gdy układ współrzędnych zastąpimy innym. Co więcej, funkcje $\varkappa$ i τ pozostaną nie zmienione. Wartości krzywizny i skręcenia pozostaną nie zmienione również wtedy, gdy zmienimy parametryzację. (Zauważmy, że parametryzacja naturalna nie jest wyznaczona jednoznacznie, lecz zależy od ustalonego na początku punktu x_0). Dlatego krzywiznę i skręcenie nazywamy niezmiennikami różniczkowymi krzywej, a długość łuku — jej niezmiennikiem całkowym.

Zachodzi teraz pytanie, czy zadając z góry na pewnym przedziale (a, b) dwie funkcje ciągłe, μ i ν możemy znaleźć krzywą, dla której funkcje te będą odpowiednio krzywizną i skręceniem. A jeśli znajdziemy, to w jakim stopniu zadanie tych funkcji określa krzywą jednoznacznie?

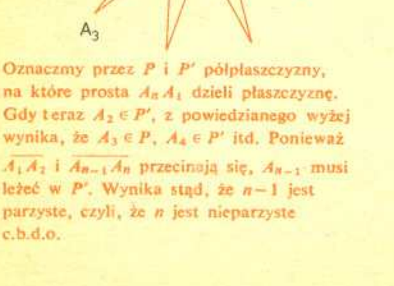
Odpowiedź na to pytanie daje nam następujące

Twierdzenie. *Dla każdych dwu funkcji ciągłych μ i ν na pewnym przedziale (a, b) istnieje taka krzywa o przedstawieniu parametrycznym φ określonym na (a, b), że $\mu(t)$ jest jej krzywizną a $\nu(t)$ skręceniem w punkcie $\varphi(t)$. Ponadto krzywa ta jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do położenia w E^3* (precyzyjniej: z dokładnością do izometrii tej przestrzeni).

Rozwiązanie zadania M 249. Dla $n = 3$ teza jest oczywista. Dla $n > 3$ niech $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ będą dwoma niekolejnymi odcinkami L. Ponieważ średnica L jest równa 1, punkty C i D muszą leżeć w przecięciu kół o promieniu 1 i środkach w A i B.



Łatwo teraz zauważyć, że gdy C leży w „trójkącie" ABM, D musi leżeć poza tym zbiorem, czyli w „trójkącie" ABN, a więc odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ przecinają się.



Oznaczmy przez P i P' półpłaszczyzny, na które prosta A_nA_1 dzieli płaszczyznę. Gdy teraz $A_2 \in P'$, z powiedzianego wyżej wynika, że $A_3 \in P$, $A_4 \in P'$ itd. Ponieważ $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{A_{n-1}A_n}$ przecinają się, A_{n-1} musi leżeć w P'. Wynika stąd, że $n-1$ jest parzyste, czyli, że n jest nieparzyste c.b.d.o.

Dla dowodu zauważmy najpierw, że opis parametryczny takiej krzywej ma spełniać następujący układ równań różniczkowych

$$(10)\qquad \begin{aligned} &u'(x) = T(x), \quad T'(x) = \mu(x)N(x), \\ &N'(x) = -\mu(x)T(x)+\nu(x)B(x), \quad B'(x) = -\nu(x)T(x), \end{aligned}$$

przy czym wektory T, N, B mają stanowić ortonormalne pole reperów Freneta wzdłuż krzywej opisanej przez u. Zaczniemy od tego, że w (a, b) ustalimy dowolny punkt wewnętrzny x_0 a w E^3 układ ortonormalny $[e_1, e_2, e_3]$ o początku w θ. W punkcie θ zaczepimy reper ortonormalny $[\mathring{T}, \mathring{N}, \mathring{B}]$ równoskrętny z $[e_1, e_2, e_3]$. Niech h będzie taką liczbą dodatnią, że $(x_0-h, x_0+h) \subset (a, b)$. Układ (10) zapiszemy w postaci całkowej

$$(10^*)\qquad \begin{aligned} &u(x) = \mathring{\theta}+\int_{x_0}^{x} T(s)\,ds, \quad T(x) = \mathring{T}+\int_{x_0}^{x} \mu(s)N(s)\,ds, \\ &N(x) = \mathring{N}+\int_{x_0}^{x} \big(-\mu(s)T(s)+\nu(s)B(s)\big)\,ds, \quad B(x) = \mathring{B}+\int_{x_0}^{x} \big(-\nu(s)T(s)\big)\,ds, \end{aligned}$$

Określmy w przedziale (x_0-h, x_0) funkcje wektorowe

$$u_1(x) = -x\mathring{T}, \quad T_1(x) = \mathring{T}, \quad N_1(x) = \mathring{N}, \quad B_1(x) = \mathring{B}.$$

W przedziale $[x_0, x_0+h)$ przyjmiemy

$$(11)\qquad \begin{aligned} &u_1(x) = \int_{x_0}^{x} T_1(s-h)\,ds, \quad T_1(x) = \mathring{T}+\int_{x_0}^{x} \mu(s)N_1(s-h)\,ds, \\ &N_1(x) = \mathring{N}+\int_{x_0}^{x} \big(-\mu(s)T_1(s-h)+\nu(s)B_1(s-h)\big)\,ds, \quad B_1(x) = \mathring{B}+\int_{x_0}^{x} \big(-\nu(s)T_1(s-h)\big)\,ds. \end{aligned}$$

Mając funkcje wektorowe T_1, N_1, B_1 określone w przedziale $[x_0, x_0+h]$ możemy je podstawić do całek po prawej stronie wzorów (11) i otrzymujemy ich przedłużenia na przedział $[x_0+h, x_0+2h]$. Następnie tym samym sposobem przedłużamy je na przedział $[x_0+2h, x_0+3h]$ i tak dalej, aż określimy je na całym przedziale $[x_0, b]$. Opis u_1 pewnej krzywej określamy teraz na $[x_0, b]$ przyjmując

$$u_1(x) = \int_{x_0}^{x} T_1(s)\,ds.$$

Teraz przedłużymy funkcje wektorowe T_1, N_1, B_1, a następnie u_1 na przedział $[a, x_0]$ przyjmując

$$\begin{aligned} &T_1(x) = \mathring{T}-\int_{x}^{x_0} \mu(s)N_1(s+h)\,ds, \quad N_1(x) = \mathring{N}-\int_{x}^{x_0} \big(-\mu(s)T_1(s+h)+\nu(s)N_1(s+h)\big)\,ds, \\ &B_1(x) = \mathring{B}+\int_{x}^{x_0} \nu(s)T_1(s+h)\,ds, \quad u_1(x) = -\int_{x}^{x_0} T_1(s)\,ds \end{aligned}$$

najpierw dla przedziału $[x_0-h, x_0]$, potem dla $(x_0-2h, x_0-h]$, i tak dalej, aż przedłużymy je na cały odcinek $(a, x_0]$. Następnie wykonujemy analogiczną konstrukcję przyjmując na początku zamiast h liczbę $h/2$. Wyżej opisaną metodą określimy na przedziale (a, b) funkcje wektorowe T_2, N_2, B_2 i u_2. Biorąc dalej $h/4, h/8, \ldots, h/2^n, \ldots$ w miejsce h otrzymamy ciągi funkcji wektorowych T_n, N_n, B_n, u_n. Można wykazać, czego tu robić nie będziemy, że istnieją graniczne funkcje wektorowe $u = \lim\limits_{n|\infty} u_n$, $T = \lim\limits_{n|\infty} T_n$, $N = \lim\limits_{n|\infty} N_n$, $B = \lim\limits_{n|\infty} B_n$ i że funkcje te spełniają układ (10*), więc i (10). Korzystając z podstawowych twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych można pokazać, że podanie wyjściowego repera $[\mathring{T}, \mathring{N}, \mathring{B}]$ zaczepionego w określonym punkcie daje rozwiązanie układu (10), a tym samym opis krzywej, jednoznacznie. Stwierdzamy więc, że podanie dwóch podstawowych niezmienników, krzywizny i skręcenia określa jednoznacznie krzywą z dokładnością do jej położenia w przestrzeni euklidesowej E^3. Proponujemy Czytelnikowi prześledzenie wyżej pokazanej konstrukcji w przypadku kiedy skręcenie znika i wykazanie, że wtedy krzywa leży w pewnej płaszczyźnie.

Z tego twierdzenia wypływa ważny wniosek, dotyczący linii śrubowej:

Wniosek: *Jeżeli krzywa w przestrzeni E^3 ma stałą krzywiznę i stałe skręcenie, to jest izometryczna z linią śrubową, określoną wzorem*

$$\varphi(t) = (a\cos t, a\sin t, ct).$$

Rozwiązanie zadania M 247. Zauważmy, że jeżeli $n \geqslant 4$, to reszta z dzielenia 2^n przez 80 jest jedną z liczb 16, 32, 48, 64, a reszta z dzielenia 3^n przez 80 — jedną z liczb 1, 3, 9. Widać już teraz, że 2^n i 3^m dla $m, n \geqslant 4$ nie mogą być kolejnymi liczbami naturalnymi. Bezpośrednie sprawdzenie dla pozostałych wartości m, n przekona nas, że jedynymi rozwiązaniami mogą być pary (1, 2), (2, 3), (3, 4), (8, 9).

Rozwiązanie zadania F 86. Po przeniesieniu końców do punktu B, pręt przyjmie kształt trójkąta, łańcuch — wielokąta. Zmuszenie łańcucha do odtworzenia kształtu „złożonego” pręta, wymaga pociągnięcia odpowiedniego ogniwa ku dołowi, co wiąże się z wykonaniem dodatkowej pracy. Zatem, minimalna praca podniesienia końca łańcucha jest mniejsza. Bardziej formalny dowód można przeprowadzić wykazując, że środek masy trójkąta leży wyżej. Pozostawiamy to jako ćwiczenie dla Czytelnika.