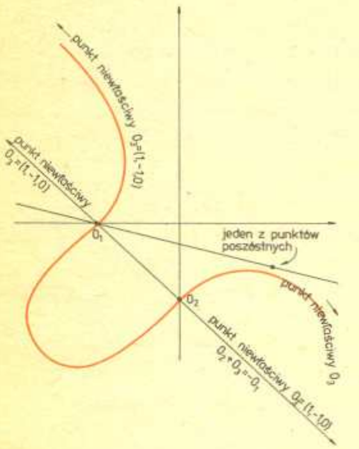
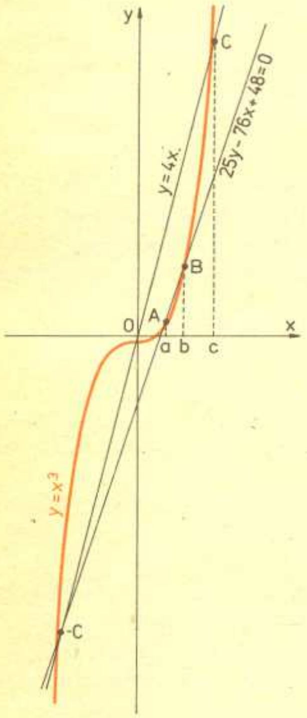
Czego nie widzimy, patrząc na krzywą?

Dr Michał SZUREK



Rys. 1. Krzywa o równaniu $x^3+y^3+3xy+1 = 0$.



Rys. 4. Na krzywej o równaniu $y = x^3$ dodawanie punktów to dodawanie ich odciętych: prosta przechodząca przez (a, a^3) i (b, b^3) ma równanie $(y-b^3)/(x-b) = (b^3-a^3)/(b-a)$ i przecina tę krzywą w punkcie o współrzędnych $(-(a+b), -(a+b)^3)$.

W jednym z opowiadań Stanisława Lema dwaj sławni konstruktorzy, Trurl i Klapaucjusz uganiali się za smokiem. Gdy już, już dopadali potwora, ten nagle znikał i odnajdywał się za ich plecami albo śmiał się z nich zza skały. Dokładniej: chował się do przestrzeni konfiguracyjnej (jako tępawe bydlę czynił to zupełnie instynktownie), zaś Trurl i Klapaucjusz mogli zobaczyć i brali za całość tylko jego nędzne trójwymiarowe ślady. Dziwili się więc, że smok jest jednocześnie w kilku miejscach jakby zapominając, że oni też mają gdzie indziej głowę a gdzie indziej nogi.

Co opisuje równanie $x^2+y^2 = 0$. Zbiór jednopunktowy? Tak, o ile rozwiązań szukamy tylko wśród liczb rzeczywistych. Jeżeli przypomnimy sobie o liczbach zespolonych, mamy $x^2+y^2 = (x+yi)(x-yi)$ i widzimy, że $x^2+y^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = -ix$ lub $y = ix$.

Co to za zbiór $y = ix$, gdzie x i y są liczbami zespolonymi? Nazywamy go *prostą zespoloną*. Dlatego *prostą*, bo skłonni jesteśmy nazywać tak każde coś opisywane równaniem $y = ax$ (gdzie $a =$ const) czy ogólniej równaniem liniowym $ax+by+c = 0$. *Nazywamy* — bo do ,,narysowania'' takiego zbioru potrzebowalibyśmy dwóch parametrów zespolonych, czyli czterech rzeczywistych. W czterowymiarowych przestrzeniach trudno o rysunki. A zatem równanie $x^2+y^2 = 0$ opisuje dwie proste zespolone, z których w naszym ,,rzeczywistym'' świecie widzimy tylko ich punkt przecięcia: $x = 0$, $y = 0$. Natomiast zbiór opisany równaniem

(1) $$x^3+y^3+3xy+1 = 0$$

jawi nam się jako krzywa, a nie widzimy tej całej skomplikowanej figury, jaką tworzą zespolone rozwiązania równania (1). Jak wobec tego można badać własności takich figur? Tylko metodami analizy matematycznej, geometrii analitycznej i specjalnie w takim celu stworzonymi metodami geometrii algebraicznej. Czy na naszej (tj. opisanej równaniem (1)) krzywej są jakieś ,,punkty charakterystyczne''? Oczywiście, np. te, w których krzywa się wyprostowuje (O_1 i O_2 na rysunku 1), czy ten, w którym krzywizna jest największa.

Punkty wyprostowania wykresu funkcji $y = f(x)$ są tam, gdzie zeruje się druga pochodna $f''(x)$ — jeżeli w ogóle ona istnieje (p. artykuł A. Szybiaka). Dla krzywych określonych równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$ punkty wyprostowania są punktami przecięcia krzywej z jej *hesjanem*: gdy f jest wielomianem jednorodnym, hesjan taki jest krzywą opisaną prostym równaniem

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0;$$

wskaźniki u dołu oznaczają pochodne cząstkowe. Dla niejednorodnych wielomianów równanie hesjanu jest bardziej skomplikowane. Można o tym przeczytać w tych podręcznikach analizy matematycznej, które omawiają funkcje uwikłane. Jeszcze trochę teorii. W artykule I. Grzegorczyk jest opisane, jak do krzywej płaskiej dołączamy jej punkty niewłaściwe, ,,punkty w nieskończoności''. Nasza krzywa z równania (1) (rzeczywista, czy zespolona, wszystko jedno) ma jeden punkt niewłaściwy, odpowiadający kierunkowi prostej $x+y = 0$ i równaniem tak uzupełnionej krzywej na płaszczyźnie rzutowej jest

(2) $$x^3+y^3+z^3+3xyz = 0.$$

Powstaje ono przez dopisanie ,,gdzie trzeba'' trzeciej zmiennej z. Utworzony z dziewięciu pochodnych cząstkowych wyznacznik opisuje — jak wyżej — hesjan rozpatrywanej krzywej uzupełnionej.

Poprosimy wreszcie Czytelnika, by przyjął bez dowodu twierdzenie, że ,,hesjanowe'' kryterium na punkty wyprostowania krzywej modyfikuje się na takie krzywe w zrozumiały sposób: *Punkty wyprostowania krzywej opisanej na płaszczyźnie rzutowej równaniem jednorodnym $f(x, y, z) = 0$ leżą na hesjanie tej krzywej.*

Możemy teraz potwierdzić rachunkiem to, co widzimy: poza punktami O_1 i O_2 nasza krzywa innych punktów wyprostowania w ,,widzialnym'' zakresie nie ma. Rachunki są proste, trzeba tylko umieć różniczkować. Hesjanem równania (1) jest

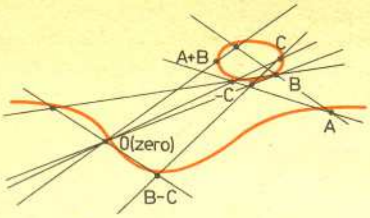
(3) $$H(x, y, z) \equiv 54(5xyz-x^3-y^3-z^3) = 0$$

i dodając (3) do (2) dostajemy $xyz = 0$, co po wstawieniu z powrotem do (2) daje

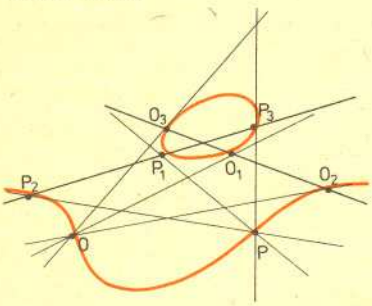
(4) $$x^3+y^3+z^3 = 0 \quad \text{i na koniec mamy}$$

(5) $$\begin{cases} \text{jeżeli} \quad x = 0, & \text{to} \quad y^3+z^3 = 0, \quad \text{a więc} \quad (y+z)(y^2-yz+z^2) = 0, \\ \text{jeżeli} \quad y = 0, & \text{to} \quad x^3+z^3 = 0, \quad \text{a więc} \quad (x+z)(x^2-xz+z^2) = 0, \\ \text{jeżeli} \quad z = 0, & \text{to} \quad x^3+y^3 = 0, \quad \text{a więc} \quad (x+y)(x^2-xy+y^2) = 0. \end{cases}$$

Pamiętając, że x, y i z tworzą współrzędne jednorodne punktu płaszczyzny rzutowej, a więc nie wszystkie są równe zeru i określone są tylko z dokładnością do proporcjonalności, znajdujemy łatwo punkty wyprostowania naszej krzywej: $(0, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$ oraz $(1, -1, 0)$. Dołączony,



Rys. 2. Operacje arytmetyczne na krzywej trzeciego stopnia.



Rys. 3. Dwa punkty wyprostowania i sześć dalszych punktów poszóstnych na krzywej trzeciego stopnia.

a „niewidoczny" punkt w nieskończoności jest trzecim punktem, w którym nasza krzywa jest „lokalnie prosta". Pamiętając zaś o rozwiązaniach nierzeczywistych (badamy przecież cały zespolony zbiór opisany równaniem (1)) otrzymujemy łatwo wszystkie inne rozwiązania układu (5):

$$(6) \quad \begin{cases} (0,1,-1),\ (1,0,-1),\ (1,-1,0) & \text{(znalezione przedtem)} \\ (0,1,\alpha),\ (\alpha,0,1),\ (1,\alpha,0), & \\ (0,1,\beta),\ (\beta,0,1),\ (1,\beta,0), & \end{cases}$$

gdzie α i β są pierwiastkami wielomianu x^2-x+1.

A więc przez „przypomnienie sobie", że krzywe mają też punkty „w nieskończoności" a równania — pierwiastki zespolone, dotknęliśmy na naszej krzywej siedmiu nowych jej punktów charakterystycznych. No, może nie na „naszej" krzywej, tylko na całym zespolonym smoku, który pokazuje nam tylko swoje prześwietlenie — krzywą z rysunku 1. Konfiguracja utworzona przez krzywą i jej punkty wyprostowania ma wiele interesujących własności, z których zwrócimy tu uwagę na jedną, podstawową: *na każdej z prostych łączących dwa punkty wyprostowania leży trzeci taki punkt* (być może „niewidoczny", zespolony). Można to sprawdzić łatwym rachunkiem dla punktów w (6) a uwierzyć w ogólnym przypadku — lub czytać dalej.

Zdumiewającego opisu punktów wyprostowania dostarcza teoria grup. Wybierzmy jeden taki punkt (razem jest ich 9) jako element zerowy grupy, którą za chwilę zbudujemy. Aby dodać dwa punkty A i B na naszej krzywej — albo na dowolnej krzywej trzeciego stopnia — prowadzimy przez te punkty linię prostą (gdy $A = B$, to styczną). Przecina ona daną krzywą w jeszcze jednym i tylko jednym punkcie A' — choć może to być punkt „w nieskończoności" lub mieć nierzeczywiste współrzędne, nic nie szkodzi. Łączymy A' z uprzednio wybranym za zerowy punktem O. Prosta przechodząca przez te dwa punkty znów przecina krzywą w jednym tylko punkcie. Ten właśnie punkt przyjmiemy za sumę $A+B$ (rys. 2). Od razu zadanie dla Czytelnika: jak obliczyć $-A$?

Dlaczego tak, a nie inaczej? Skąd takie dziwne określenie tego działania?. Na przykład stąd, że po pierwsze „wychodzi" grupa, po drugie działania te są „algebraiczne", a po trzecie ze wszystkich zupełnych krzywych zespolonych taką grupę można określić tylko na tych, które można opisać równaniem stopnia trzeciego, a są to opisane w artykule J. Olędzkiego zwarte powierzchnie rodzaju 1. Metodą „rysunkową" możemy się dość łatwo przekonać (a nawet pokusić się o poprawny dowód) o słuszności następującego twierdzenia:

Punkty wyprostowania krzywej to rozwiązania równania $3X = O$ (dokładniej: $X+X+X = O$) w powyżej zdefiniowanej grupie.

Z tego twierdzenia wynika m.in., że jeżeli A i B są punktami wyprostowania, to $-(A+B)$ też (bo jeżeli $3A = O$ i $3B = O$, to $3(-A-B) = O$). Jeżeli teraz przekonamy się, że punkty A, B i $-(A+B)$ są współliniowe, to tak jakbyśmy udowodnili, że istotnie na każdej prostej łączącej dwa punkty wyprostowania znajdzie się trzeci.

Dokładnie: jeżeli nieosobliwa zwarta powierzchnia Riemanna jest grupą algebraiczną, to jest ona (izomorficzna z) zespoloną „krzywą" trzeciego stopnia, a więc topologicznie jest torusem albo (co na jedno wychodzi) sferą z jedną doklejoną rączką.

W poszukiwaniu innych punktów charakterystycznych zrobimy następującą obserwację. Przez każdy punkt płaszczyzny można przeprowadzić cztery styczne do danej krzywej trzeciego stopnia. Na rysunku 3 krzywa S składa się z dwu gałęzi: owalu i nieograniczonej krzywej z garbem. Być może będą to tylko styczne nie tyle do S, co do tego dużego smoka zespolonego, którego S jest resztówką. Precyzyjnie: do zbioru określonego w przestrzeni zespolonej takim samym równaniem co S w rzeczywistej. Takie styczne są na ogół jednokrotne, ale jest kilka punktów (zobaczymy, ile), przez które przechodzą cztery styczne w tym jedna trzykrotna (razem 6 stycznych). I takie punkty nazywają się poszóstne (sextatic). Które to punkty? Zupełnie proste rozważania „na ogólnym rysunku" doprowadzą do wniosku, że punkt X jest poszóstny wtedy i tylko wtedy, gdy $6X = O$ i rzeczywiście tak to jest.

Punkty wyprostosowania krzywej możemy też określić bardziej algebraicznie. Przypuśćmy, że układ współrzędnych na płaszczyźnie wybraliśmy tak, że nasza krzywa L w otoczeniu początku układu jest wykresem funkcji $y = f(x)$ przy czym $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$ — a więc oś x jest styczna do L. Wówczas krzywizna L w $(0,0)$ jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) = 0$; por. np. artykuł A. Szybiaka. Jest to „algebraiczna" charakteryzacja punktów wyprostowania i w ogóle pojęcia krotności stycznej (styczna jest 17-krotna, gdy pierwszych 16 pochodnych jest równych 0). Tak sformułowana charakteryzacja może być przeniesiona na zbiory zespolone i ma sens wszędzie tam, gdzie „umiemy" różniczkować, a więc np. gdzie występują tylko funkcje wielomianowe. Do „formalnego" określenia pochodnej wielomianu nie musimy mieć bowiem pojęcia granicy.

Styczna potrójna do krzywej trzeciego stopnia musi przechodzić przez punkt wyprostowania, a więc punkt jest poszóstny, gdy leży na stycznej wyprowadzonej z pewnego punktu wyprostowania. Ponieważ punktów wyprostowania jest 9, a z każdego z nich wychodzą trzy styczne (plus styczna w tym punkcie), więc punktów poszóstnych jest 27. Ułożone są we współliniowe trójki, a Czytelnik może to sobie udowodnić, patrząc na rysunek 3 i rozumując tak: punkty styczności i tylko one spełniają równanie $2X = O$, a O_1+O_2 spełnia to równanie. Skoro więc $O_1+O_2 \neq O$, to $O_1+O_2 = O_3$, ale $2O_3 = O$, więc $O_1+O_2+O_3 = O$, a to znaczy, że punkty te są współliniowe. Znalezienie punktów poszóstnych tych krzywych, które tu rozpatrywaliśmy, pozostawiamy Czytelnikom. Nie poszukamy też wielu istniejących innych punktów charakterystycznych zarówno krzywej (1) jak i innych zbiorów algebraicznych. Na zbiorach określonych bardziej skomplikowanymi równaniami takich „naprawdę charakterystycznych" punktów jest zatrzęsienie. Wielu z nich nie widzimy, patrząc na wykres sporządzony w przestrzeni euklidesowej.