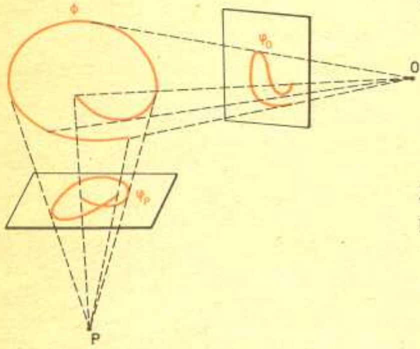
Co widzimy patrząc na krzywą?

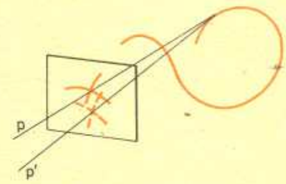
Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

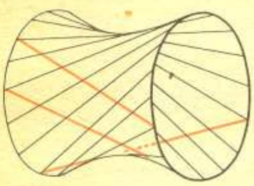
Spójrzmy na zamieszczony obok rysunek toru Marsa na tle gwiazd. Domyślamy się, że to nie planeta nagle zakręciła, tylko tak to nam się wydaje.

Patrząc z boku na śrubę widzimy ,,ostrza'', choć linia śrubowa ich nie ma. Co jeszcze możemy zobaczyć patrząc na krzywą? Gdy z punktu O patrzymy na gładką krzywą przestrzenną Φ, widzimy ,,tak naprawdę'' krzywą płaską Φ_0 — rzut perspektywiczny krzywej Φ. Rzut ten może nie mieć żadnych punktów ,,osobliwych'', może jednak mieć np. samoprzecięcie, spowodowane widzeniem jednego łuku krzywej Φ na tle innego.

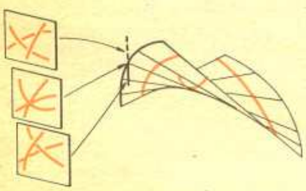


Zauważmy, że samoprzecięcie takie jest stabilne — gdy przeniesiemy się do innego bliskiego punktu, zobaczymy je znów:

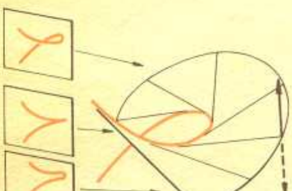




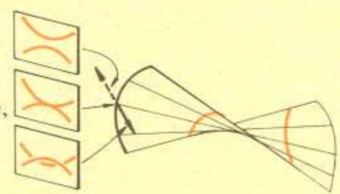
Mogą jednak w pewnych szczególnych przypadkach pojawić się rozmaite punkty osobliwe. Na przykład można niekiedy znaleźć całą rodzinę prostych ślizgających się po trzech parami skośnych łukach i zamiatających pewną powierzchnię — można to zobaczyć na hiperboloidzie jednopowłokowej utkanej z prostych przecinających trzy dane proste skośne.



Patrząc z punktu leżącego na takiej powierzchni zobaczymy oczywiście potrójne samoprzecięcie. Wystarczy jednak opuścić powierzchnię, by nasze przecięcie potrójne rozpadło się na ,,trójkąt'' zbudowany z trzech łuków przecinających się w trzech punktach. Jest to tzw. osobliwość kowymiaru 1.

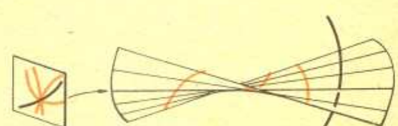


Na rysunku obok widzimy powierzchnię utkaną z prostych stycznych do pewnej krzywej. Gdy nasze oko zbliża się do tej powierzchni widzimy coraz węższą pętelkę, która wreszcie w punkcie osobliwym zamieni się w ,,dziobek,'' aby wreszcie rozwinąć się całkowicie.

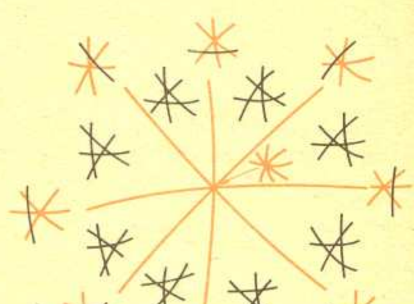


Podobnie jak i poprzednio, mamy tu do czynienia z osobliwością kowymiaru 1. Katalog takich osobliwości zakończy ,,pozorna styczność'' narysowana obok wraz z jej rozwinięciem

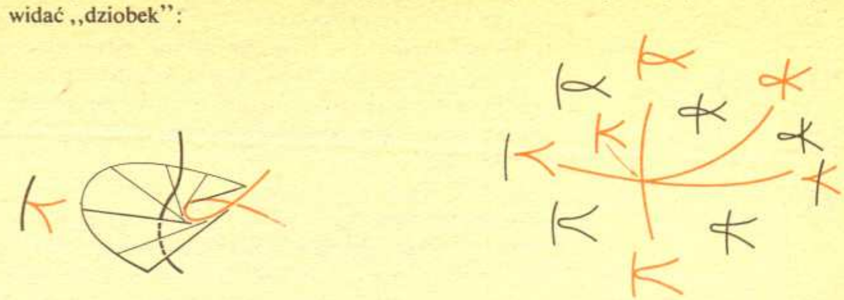
Mogą się jednak przydarzyć i jeszcze bardziej osobliwe sytuacje. Wyobraźmy sobie na przykład, że powierzchnię, z której obserwowaliśmy potrójne samoprzecięcie, przebija jeszcze inny łuk naszej krzywej. Gdy teraz nasze oko znajdzie się na prostej przechodzącej przez ten punkt przebicia, zobaczymy samoprzecięcie poczwórne:



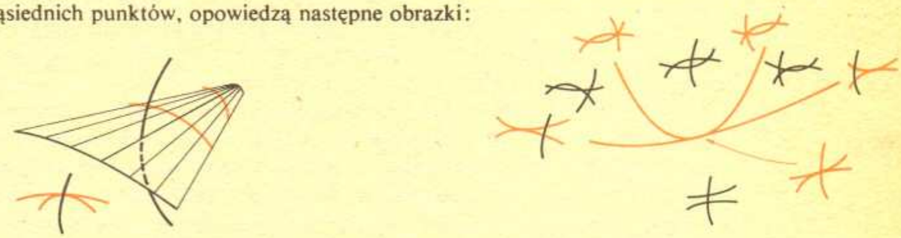
Teraz już nasza osobliwość ma kowymiar 2 i pełny opis jej okolic wymaga rysunku ,,dwuwymiarowego''. Oto co możemy zobaczyć zmieniając nieco położenie oka (kolorem zaznaczono punkty, z których możemy obserwować samoprzecięcie potrójne).



A oto podobna seria rysunków dla sytuacji, w której krzywa przebija powierzchnię, z której widać ,,dziobek'':



Tu również na ,,dwuwymiarowym'' rysunku okolic naszej osobliwości widzimy krzywe odpowiadające osobliwościom prostszym — o kowymiarze 1: ,,pozornej styczności'', ,,dziobkowi'' i trzykrotnemu samoprzecięciu. Możemy wreszcie na tle dwóch pozornie stycznych łuków zobaczyć trzeci łuk ,,przecinający je''. O tym, jak to się może stać i co możemy zobaczyć z sąsiednich punktów, opowiedzą następne obrazki:



Nasz katalog osobliwości kowymiaru 2 jest jeszcze niekompletny. Brak mu jeszcze dwu pozycji o dość podobnym charakterze. Zauważmy, że ,,typowa styczność pozorna'' dawała obrazek bardzo podobny do styczności prostej i zwykłej paraboli. Może się jednak zdarzyć, że otrzymamy coś, co przypomina wykres funkcji $y = x^3$ styczny do osi x — będzie to też osobliwość kowymiaru 2.

Jak widać, w pobliżu mogą się pojawić zwykłe ,,pozorne styczności''.

Możliwy jest również pewien odpowiednik tej osobliwości w postaci ,,wyjątkowo ostrego dziobka'', którego otoczenie wygląda tak:

Tu z kolei otoczenie punktu osobliwego zawiera punkty, z których widać ,,dziobek'' lub ,,pozorną styczność''.

Osobliwości kowymiaru 3 nie są już zbyt ciekawe: może się na przykład zdarzyć, że dwa łuki krzywej zaczną w perspektywie wyglądać podobnie do wykresu $y = x^4$ stycznego do osi x lub też z pewnego punktu wyjątkowego zobaczymy narysowaną powyżej ,,styczność rzędu 3'' na tle innego fragmentu naszej krzywej. A jeśli przypadkiem zobaczymy coś, czego w naszym katalogu brak? Na przykład coś takiego:

 lub coś takiego  czy  ?

No cóż — widocznie mamy do czynienia z nietypową krzywą. Kiepski dowcip? Nie — trzeba tylko powiedzieć, co to znaczy, że krzywa jest nietypowa.

Otóż możemy uznać dwie krzywe ϕ i ψ (rozumiane jako odwzorowania R w R^3) za bliskie, gdy dla każdej wartości parametru t odległości $|\phi(t)-\psi(t)|, |\phi'(t)-\psi'(t)|, \ldots, |\phi^{(4)}(t)-\psi^{(4)}(t)|$ są małe (jest to tzw. C^4 — topologia). Gdy tak określimy bliskość, okaże się (co udowodnił C. T. C. Wall), że dowolnie blisko każdej krzywej znajduje się (inna) krzywa, która zademonstruje nam tylko opisane wyżej osobliwości (można ją nazwać krzywą regularną). Co więcej ,,nietypowe'' czyli nieregularne krzywe to tylko nieliczne wysepki w przestrzeni wszystkich krzywych.
Inaczej mówiąc: aby wygiąć drut do krzywej nieregularnej musimy się bardzo starać. A gdy dostaniemy do ręki taką krzywą, możemy ją bez wysiłku zdeformować tak, aby otrzymać krzywą regularną — choćby drut był bardzo sztywny.
Kowymiar osobliwości to — najprościej mówiąc — liczba parametrów niezbędnych do pełnego opisu jej pobliża.

Dlaczego używa się tylko prądu o napięciu 220 V, 127 V (ZSRR), oraz 110 V (np. USA). Po prostu $220 = 2 \cdot 110$ i urządzenia dostosowane do 110 V łatwo przerobić (przez połączenie szeregowe) na 220 V. Z kolei $110 = 2 \cdot 55$, a 55 V to minimalne napięcie potrzebne do zapalenia łuku węglowego, pierwszego elektrycznego źródła wiatła. A co ze 127? Otóż 220 V i 110 V to tzw. napięcia skuteczne prądu zmiennego decydujące o jego energii. Napięcie skuteczne dla prądu płynącego między elektrodą o potencjale zmiennym i elektrodą o potencjale stałym (np. ziemią) jest $\sqrt{2}$ razy mniejsze niż napięcie maksymalne. Natomiast dla prądu trójfazowego płynącego między dwiema dowolnymi fazami $\sqrt{2}$ zamienia się na $\sqrt{3}$. Jeżeli napięcie maksymalne wynosi 220 V (to już magia liczb, bo o zapaleniu się łuku decyduje przecież napięcie skuteczne), to skuteczne równa się $220/\sqrt{3} \approx 127$ V.

(*J. P.*)