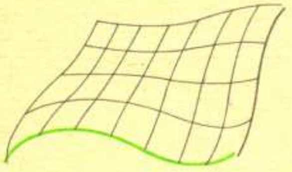
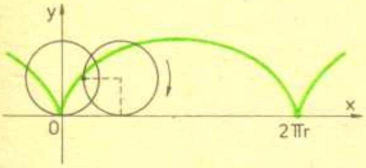
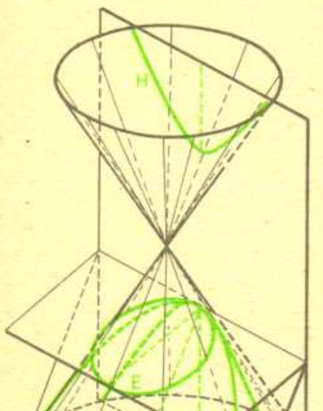
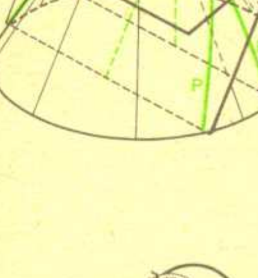
O krzywych i powierzchniach

Prof. dr Roman DUDA





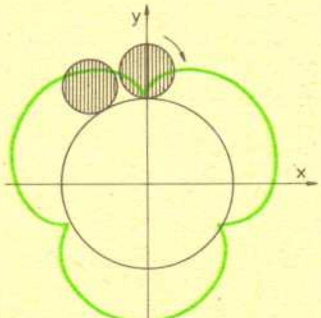


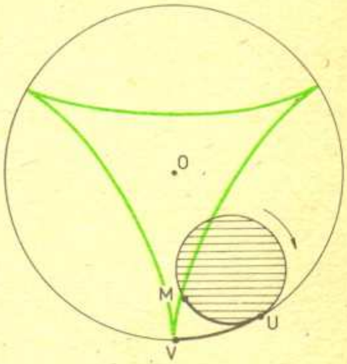


Powiadają niektórzy, że matematyka jest podobna do muzyki. To podobieństwo w każdym razie przyszło mi na myśl, kiedy zasiadłem do pisania tego artykułu i zdałem sobie sprawę, że jest to temat, który można — jak dobry temat w muzyce — rozwinąć wieloma sposobami i w każdym z powstałych tą drogą utworów zawrzeć kawałek ciekawej matematyki. Postanowiłem jednak, że miast rozwijać temat, dokonam jakby przeglądu niektórych rozwinięć z nadzieją, że i takie brząkanie może się okazać dla Czytelnika interesujące. Osią tego przeglądu, wprowadzającą pewien ład, będzie historia.

Jak każda niemal historia, także i ta zaczyna się od Greków. W *Elementach* Euklidesa, najbardziej znanej książce naukowej świata, znajduje się czarujące w swej prostocie określenie: *linia to długość bez szerokości* (księga I, definicja 2). I nieco dalej: *krańcem powierzchni jest linia* (definicja 6). Określenia te leżą do dziś u źródeł intuicyjnego rozumienia krzywej i wystarczały jako jej definicja do czasów niemal nam współczesnych (słowo *linia* jest synonimem krzywej). Pierwsze z nich kładzie nacisk na jednowymiarowy charakter krzywej, drugie zaś wiąże ją z powierzchnią mającą (na mocy definicji 5 tamże) tylko długość i szerokość. Ów związek stał się w XX wieku podstawą tzw. indukcyjnego pojęcia wymiaru, z którego rozwinęła się teoria wymiaru — ale to już do tematu nie należy. Nie ma natomiast w *Elementach* rozumienia krzywej jako trajektorii poruszającego się punktu materialnego — co przyjdzie w czasach nowożytnych — wiązanie bowiem matematyki z materialną rzeczywistością było dla Greków czymś zasadniczo obcym.

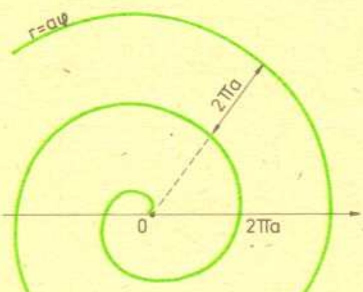
Jakie krzywe Grecy znali? Znali ich sporo i wszystkie one brały początek z powabnych matematycznie konstrukcji. Za najpiękniejsze uznawali linię prostą i okrąg oraz ich pochodne jak *cykloida*, *epi-* i *hipocykloidy*, zaś przyrządom służącym do ich rysowania — *liniałowi* i *cyrklowi* — przypisywali uprzywilejowane znaczenie w geometrii.

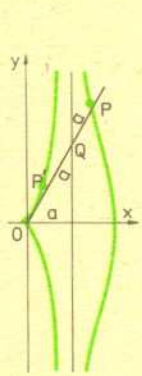


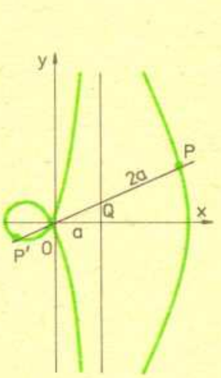


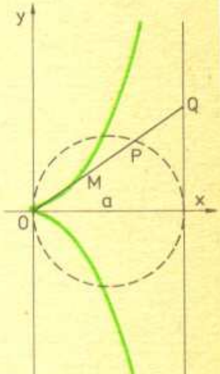
Odbiło się to na ich kosmologii, w stworzonym bowiem przez nich systemie świata Ziemia znajdowała się w środku, a wokół niej po okręgach krążyły Słońce, Księżyc i planety. Nie zgadzało się to z obserwacjami, więc z czasem rozbudowano ten system tworząc skomplikowany mechanizm, którego zasadniczymi elementami były okręgi toczące się po innych okręgach. Wszystkich tych okręgów u Ptolemeusza (II wiek n.e.) było aż 41, ale z uprzywilejowania tej krzywej Grecy nie zrezygnowali nigdy.

Drugą kategorię krzywych stanowiły *elipsa*, *parabola* i *hiperbola*, określane jako przekroje stożka (stąd ich nazwa: *stożkowe*). Apoloniusz (ok. 262 — 190 p.n.e.) napisał o nich wspaniały traktat, matematycznie tak doskonały, że praktycznie zamknął przed badaczami ten obszar, przynajmniej z czysto geometrycznego punktu widzenia. Do trzeciej, najniższej i raczej niechętnie widzianej kategorii należały takie krzywe jak *spirala Archimedesa*, *konchoida Nikomedesa* czy *cissoida Dioklesa*.





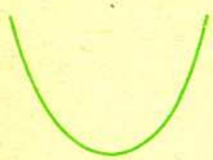




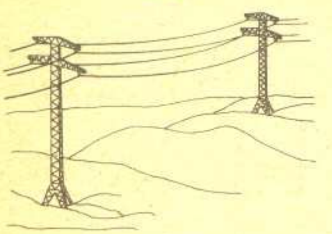
Znacznie mniej niż krzywe interesowały Greków powierzchnie. Zajmowali się tylko kilkoma najprostszymi — płaszczyzną, stożkiem, walcem, sferą — i to bardziej jako miejscem, gdzie są ciekawe rzeczy do badania, jak stożkowe, linia śrubowa itp. niż nimi samymi.

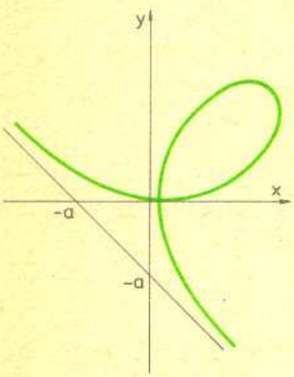
Niezwykły triumf przeżyły stożkowe w 1600 lat z górą po swym odkryciu. Kopernik (1473—1543), który przeniósł środek świata do Słońca, a Ziemi i pozostałym planetom kazał obiegać Słońce (oczywiście po okręgach), stworzył teorię matematycznie znacznie prostszą, ale mało dokładną, a nawet dającą wyniki gorsze od greckiej. Poprawił ją Kepler (1571—1630), który pod wpływem lektury traktatu Apoloniusza wpadł na myśl, że planety krążą po elipsach, a Słońce znajduje się we wspólnym ognisku tych elips. Zgodność z obserwacją była tym razem doskonała i w ten sposób konstrukcja matematycznie piękna okazała się także użyteczna.

Był to wielki impuls dla badań nad krzywymi, a że zbiegł się on w czasie z otwarciem przez analizę Newtona (1642—1727) i Leibniza (1646—1716) oraz geometrię analityczną Kartezjusza (1596—1650) nowych horyzontów w matematyce, więc w rezultacie na jakieś dwieście lat krzywe znalazły się w samym centrum metematyki, ogromnie wiele od niej otrzymując, ale i silnie na nią w zamian wpływając.



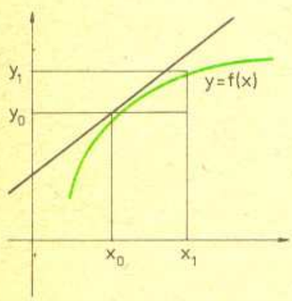
Przede wszystkim pojawiły się dwa obfite źródła dopływu nowych krzywych i dotyczących ich pytań. Jednym było przyrodoznawstwo i powstające na jego terenie zagadnienia. Pod wpływem Galileusza (1564—1642), wspomnianego już Keplera, Huygensa (1629—1695) i wielu innych, zaczęto śmiało sięgać po krzywe będące trajektoriami punktów lub w inny sposób związane z fizyką. Przykładem niech będą dwa słynne niegdyś zagadnienia. Problem *brachistochrony*: znaleźć krzywą przechodzącą przez dwa nieleżące na jednej pionowej punkty A i B, wzdłuż której punkt materialny pod wpływem ciążenia przebiegnie drogę AB w najkrótszym czasie (pomija się tarcie i opór powietrza). Problem *tautochrony*: znaleźć krzywą, wzdłuż której punkt materialny dokonuje wahań (znów pod wpływem ciążenia i z pominięciem tarcia i oporu powietrza) w tym samym czasie niezależnie od punktu startu W obu przypadkach rozwiązaniem okazała się cykloida, a znalezienie tego rozwiązania stało się początkiem rozwoju rachunku wariacyjnego (co znów nie należy do tematu). Innym przykładem krzywej „fizycznej" jest *linia łańcuchowa*, której kształt przybiera łańcuch podwieszony za dwa końce pod wpływem siły ciężkości.





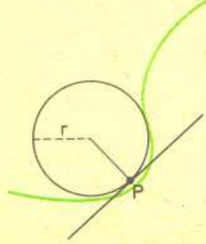
Drugim obfitym źródłem nowych krzywych stała się geometria analityczna Kartezjusza. Dzięki układowi współrzędnych na płaszczyźnie każda krzywa opisuje się za pomocą jakiegoś równania i na odwrót, równania z dwiema niewiadomymi opisują krzywe. W przestrzeni układ współrzędnych pozwala identyfikować równania z dwiema i trzema niewiadomymi z powierzchniami, układy zaś takich równań — z krzywymi jako częściami wspólnymi odpowiadających tym równaniom powierzchni. Nieoczekiwanie przy takim podejściu najprostszymi krzywymi okazują się linia prosta, okrąg i trzy stożkowe, im bowiem i tylko im odpowiadają równania stopnia 1 lub 2. Rysunek obok przedstawia jedną z krzywych stopnia 3, tzw. liść Kartezjusza. Krzywe nielubiane przez Greków okazały się przestępne, tzn. nie odpowiadają im równania wielomianowe. Znane Grekom powierzchnie mają stopień 2, ale nie są to wszystkie powierzchnie tego stopnia.

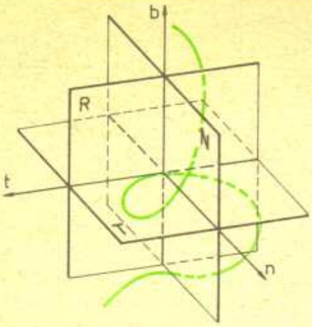
Jednocześnie pojawiły się także nowe, bardzo skuteczne metody badania krzywych dostarczone przez analizę, u której źródeł leżało proste geometryczne pytanie o styczną do krzywej (jeśli krzywa jest wykresem przebytej drogi w zależności od czasu, to tangens nachylenia stycznej wyraża chwilową prędkość ruchu).



Odpowiedzią analizy było pojęcie pochodnej. Z połączenia geometrii analitycznej i metod analizy wyłoniła się geometria różniczkowa, a pierwszym obiektem jej badań stały się krzywe, których równania miały ciągłe pochodne. Sam termin geometria różniczkowa jest późny (wprowadził go Bianchi (1856—1928)), ale badania zaliczane dziś do tego obszaru zostały zapoczątkowane jeszcze przez twórców analizy. Szły one zrazu w kierunku klasyfikacji (sam Newton napisał ciekawy traktat o krzywych stopnia trzeciego), ale obfitość krzywych jest tak olbrzymia, a trudności narastały tak wielkie, że szybko poniechano badania krzywych każdego kolejnego stopnia, podjęto natomiast, inspirowane przez ducha analizy, badanie podstawowych własności krzywych.

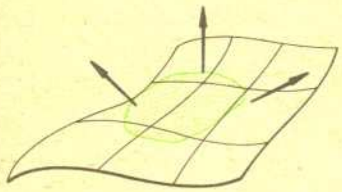
Otóż najbardziej charakterystyczną własnością krzywej jest jej zakrzywianie się. Jakkolwiek mglista może się wydawać ta własność, każdy się zgodzi, że linia prosta nie zakrzywia się wcale, zaś okrąg o promieniu r_1 zakrzywia się mniej od okręgu o promieniu $r_2 < r_1$. Jeśli chcemy wyrazić krzywiznę krzywej (w danym punkcie) liczbą, trzeba się to starać tak zrobić, by prosta miała krzywiznę 0, a okrąg o promieniu r krzywiznę $1/r$. I to okazuje się możliwe, a jeden z kilku (równoważnych) sposobów jest taki: bierzemy na krzywej K w otoczeniu punktu p trzy punkty p_1, p_2, p_3 i prowadzimy przez nie okrąg (jak wiadomo, trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają okrąg, a trzy punkty współliniowe wyznaczają prostą, którą traktujemy tu jako okrąg o promieniu ∞). Jeśli teraz punkty te uruchomimy i każemy im dążyć do punktu p, to dla krzywej, której równania mają dwie pierwsze pochodne ciągłe (standardowe założenie geometrii różniczkowej), okręgi wyznaczone przez te punkty będą dążyć do pewnego położenia granicznego. Ten okrąg graniczny najlepiej aproksymuje krzywą K w otoczeniu punktu p i jego środek nazywa się *środkiem krzywizny*, a odwrotność jego promienia — *krzywizną* krzywej K w punkcie p (pisze o tym dokładniej A. Szybiak). Inny sposób, pochodzący jeszcze od Newtona, wyraża krzywiznę jako prędkość zmiany kierunku wektora stycznego. Podstawowe twierdzenie głosi, że dla scharakteryzowania krzywej płaskiej niezawierajacej odcinków (z dokładnością do jej położenia na płaszczyźnie) wystarczy określenie krzywizny w każdym jej punkcie.





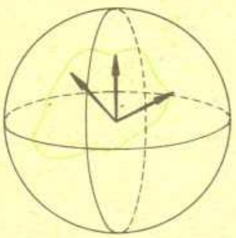
W przypadku krzywej przestrzennej (np. linii śrubowej) postępowanie jest bardziej skomplikowane. Na krzywej przestrzennej K ustalamy punkt p i bierzemy w nim styczną t. Wśród płaszczyzn zawierających t wyróżnia się taka, która najlepiej przylega do krzywej w otoczeniu punktu p; nazywa się ją *płaszczyzną ściśle styczną*. Prostopadła względem t w punkcie p, która leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, nazywa się *normalną główną*, a prosta przechodząca przez p i prostopadła zarówno do stycznej jak i do normalnej głównej nazywa się *binormalną*. Podobnie jak na płaszczyźnie, zmiany kierunku normalnej głównej (lub, co na to samo wychodzi, zmiany kierunku stycznej) opisują krzywiznę, a zmiany kierunku binormalnej — tzw. *skręcenie*, tj. miarę intensywności odchylania się krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej. Obie te wielkości, *krzywizna* i *skręcenie*, charakteryzują krzywe przestrzenne z dokładnością do ich położenia w przestrzeni (por. artykuł A. Szybiaka).

Z chwilą znalezienia tych eleganckich charakteryzacji ciężar badań w geometrii różniczkowej przesunął się na powierzchnie, gdzie trudności były znacznie większe. Podobnie jak krzywa, także powierzchnia się zakrzywia, ale matematyczne uchwycenie tego zakrzywienia okazało się trudne. W miarę postępów badań nad krzywymi próbowano je przenosić na powierzchnie poprzez analizowanie przekrojów płaszczyznami (każdy taki przekrój jest oczywiście krzywą płaską, ma więc swoją krzywiznę etc.) i choć uzyskano wyniki ciekawe, nie były one w pełni zadowalające. Trudności przełamał dopiero Gauss (1777—1855) tworząc piękną koncepcję krzywizny przestrzeni i wprowadzając całkowicie nowe metody, pozwalające na uzyskanie wielu znakomitych wyników.



Przyjmijmy, że powierzchnia M leży w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wystawiając w każdym jej punkcie p wektor $\vec{n}(p)$ prostopadły do M i mający długość 1 otrzymujemy odwzorowanie

$$n: M \to S^2: p \to \vec{n}(p),$$

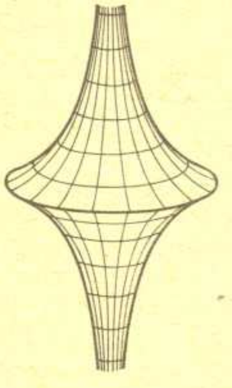


które każdemu punktowi p powierzchni M przyporządkowuje ten punkt sfery jednostkowej S^2, na który wskazuje koniec wektora $\vec{n}(p)$, jeśli go przenieść równolegle do środka tej sfery.

Z pomocą tego odwzorowania wartość bezwzględna krzywizny $k(p)$ powierzchni M w punkcie p określa się jako granicę stosunku

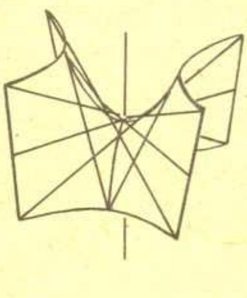
$$\frac{\text{pole obszaru } n(A)}{\text{pole obszaru } A}$$

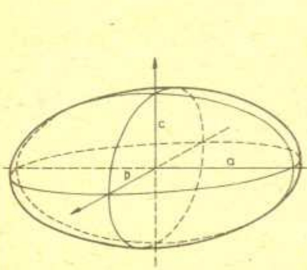
względem obszarów A zawierających punkt p i o polach zmierzających do 0. Np. dla płaszczyzny P odwzorowanie Gaussa $n: P \to S^2$ jest oczywiście stałe, a zatem $k(P) = 0$, zaś dla sfery S^2 odwzorowanie Gaussa $n: S^2 \to S^2$ jest identycznością, skąd $k(S^2) = 1$. Płaszczyzna i sfera są więc powierzchniami o stałej krzywiźnie. Warto zauważyć, że tę samą wartość bezwzględną krzywizny, co dla sfery otrzymamy dla tzw. pseudosfery $|z| = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{1-x^2-y^2}$ — tu jednak przyjmujemy $k = -1$, gdyż powierzchnia ta zakrzywia się „w obie strony". Na ogół jednak krzywizna zmienia się od punktu do punktu.

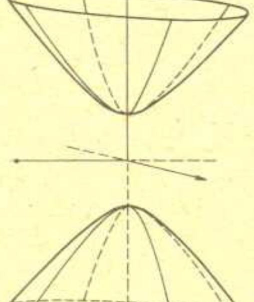


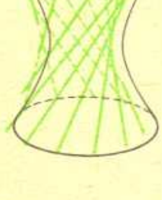
Jednym z najpiękniejszych wyników Gaussa była słynna *theorema egregium*, na mocy którego krzywizna nie zmienia się przy przekształceniach zachowujących długości krzywych na powierzchni. Był to bardzo ważny wynik i od Gaussa zaczęła się właściwa geometria różniczkowa powierzchni, której rozwój trwa do dziś i silnie wpływa na fizykę, analizę i topologię.

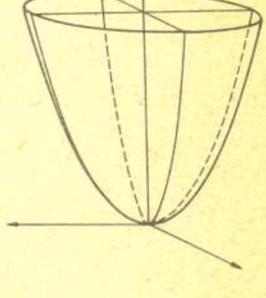
Obok ogromnego postępu w geometrii różniczkowej trwały badania powierzchni tradycyjnymi metodami geometrii analitycznej. Ważnym tu osiągnięciem była kompletna klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia (tj. przedstawialnych równaniem stopnia 2 trzech zmiennych), do których należą elipsoidy, hiperboloidy jednopowłokowe, hiperboloidy dwupowłokowe, paraboloidy eliptyczne, paraboloidy hiperboliczne, stożki i walce, natomiast próby badania powierzchni wyższych stopni nie miały ani większego powodzenia ani większego znaczenia.

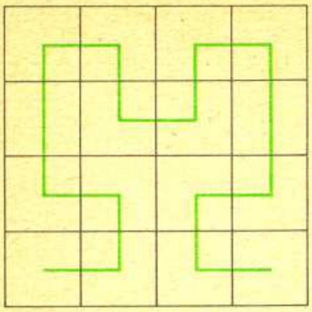


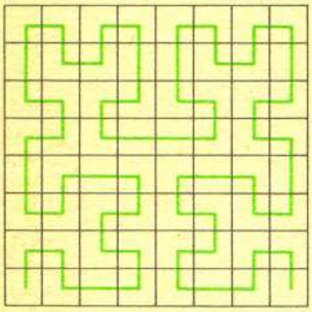


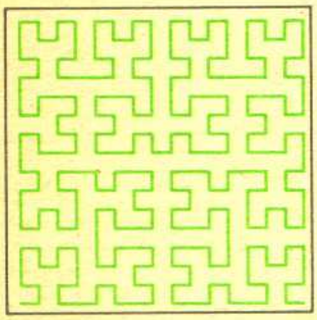


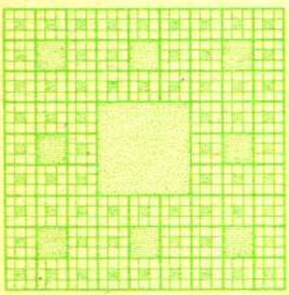


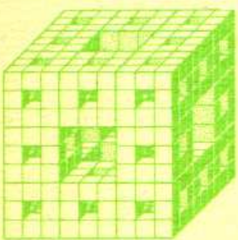




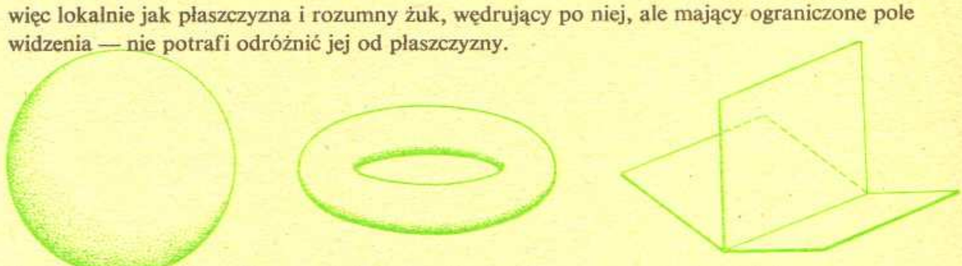




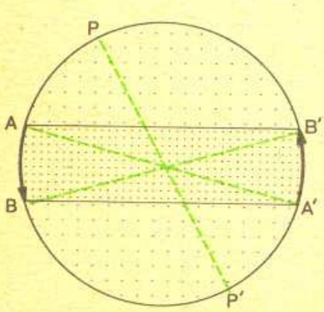


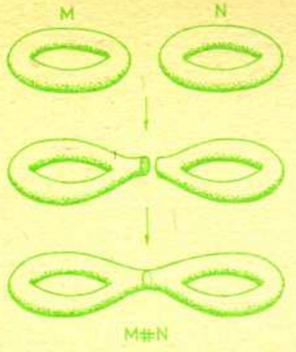


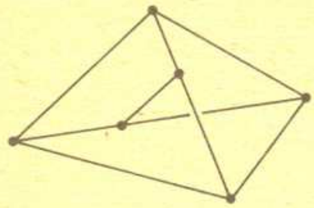
W XIX wieku zaszły w matematyce ogromne zmiany, z których bodaj najważniejszą była utrata przez geometrię roli podstawy matematyki. Było to oczywiście skutkiem pojawienia się geometrii nieeuklidesowych, ratunek zaś znaleziono z czasem w teorii mnogości. Dramatyczna ta historia do tematu nie należy, jednakże wynikiem takiego rozwoju wydarzeń było pojawienie się z końcem owego wieku dyscypliny matematycznej zajmującej się najgłębiej leżącymi własnościami przestrzeni, a mianowicie topologii.
Czy krzywa jest także pojęciem topologicznym? Jeśli ma pozostać jednym z podstawowych pojęć matematyki, to powinna być. Z tego jednak punktu widzenia dotychczasowe koncepcje nie nadawały się (były zbyt niejasne jak u Euklidesa, zbyt fizyczne jak u Keplera, zbyt wąskie jak w geometrii różniczkowej) i tak doszło do postawienia pytania: **co to jest krzywa**?
Od postawienia tego pytania do znalezienia nań zadowalającej odpowiedzi minęło lat pięćdziesiąt i historia tego półwiecza oczywiście tu się nie zmieści, wypada jednak wspomnieć o wydarzeniu, które wstrząsnęło całą tą problematyką. W słynnym *Kursie Analizy* Jordan (1838—1922) zdefiniował krzywą jako obraz ciągły przedziału linii prostej. Definicja ta ma wyraźną motywację fizyczną (trajektoria punktu w zależności od czasu), i obejmowała wszystkie dotychczas znane krzywe i w zakresie potrzebnym analizie Jordanowi całkowicie wystarczała.
W 1890 roku Peano (1858—1932) zbudował wszakże na odcinku funkcję ciągłą, której obrazem jest pełny kwadrat. Zatem jeśliby przyjąć definicję Jordana, to pełny kwadrat byłby krzywą! A także, jak się później okazało, także pełna kula i każdy w ogóle wielościan! Sam Jordan nie przyjął odkrycia Peano do wiadomości i do końca życia definiował krzywą po swojemu, było jednak jasne, że do ogólnego pojęcia nie tędy droga. Wstrząs wywołany ,,krzywą Peano" doskonale odzwierciedla uwaga Kleina (1849—1925), że nic nie wydaje mu się bardziej mętne niż pojęcie krzywej.
Wyjaśnienie przyszło z mało oczekiwanej strony, a mianowicie poprzez odpowiedź na znacznie ogólniejsze pytanie: co to jest wymiar? I to pytanie ma pasjonującą, choć nieco krótszą historię, a znalezienie nań odpowiedzi z początkiem lat dwudziestych naszego wieku przez Urysohna (1898—1924) i Mengera pozwoliło zdefiniować krzywą jako zbiór jednowymiarowy (por. ,,długość bez szerokości" u Euklidesa) z dodatkowymi i w pełni naturalnymi założeniami zwartości, spójności i metryzowalności. Z tą chwilą badania krzywych stanęły na solidnych podstawach i nadzwyczaj bujnie się rozwinęły, przy walnym zresztą udziale topologów polskich.
Z intuicyjnego punktu widzenia twory wymiarów 1, 2 i 3 są takimi obiektami geometrycznymi, z których każdy ich punkt daje się wyjąć, wraz z pewnym swym otoczeniem, przy pomocy cążek (wymiar 1), nożyczek (wymiar 2) lub piły (wymiar 3). Nieco ściślej, obiekt ma wymiar 1, gdy każdy jego punkt ma dowolnie małe otoczenie, którego ograniczenie składa się z osobnych punktów (miejsca przykładania ,,cążek"), chociaż punktów tych może być nieskończenie wiele. A jeśli zażądamy ponadto, by obiekt ten leżał w przestrzeni euklidesowej (metryzowalność), był ograniczony i zawierał granice leżących w nim ciągów (zwartość) oraz składał się z jednego kawałka (spójność), to mamy krzywą. Przykłady krzywych płaskich pokazują rysunki obok. Na szczególną uwagę zasługują dwa ostatnie, tzw. *dywany Sierpińskiego*, płaski i przestrzenny. Dywan przestrzenny zawiera w sobie (topologicznie) każdą krzywą, a dywan płaski — każdą płaską.
W przeciwieństwie do krzywych, które są wszystkimi tworami jednowymiarowymi (zwartymi, spójnymi i metryzowalnymi), powierzchnie są tworami dwuwymiarowymi (zwartymi, spójnymi i metryzowalnymi) szczególnego rodzaju: każdy ich punkt ma otoczenie takie samo (topologicznie) jak dowolny punkt płaszczyzny. Powierzchnia (ściślej mówiąc, powierzchnia zamknięta) wygląda więc lokalnie jak płaszczyzna i rozumny żuk, wędrujący po niej, ale mający ograniczone pole widzenia — nie potrafi odróżnić jej od płaszczyzny.

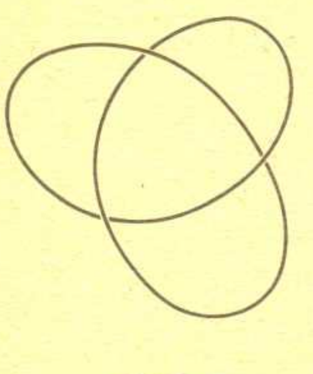


Powierzchnią jest sfera i torus, nie jest nią natomiast figura na rysunku wyżej.
Mimo tego ograniczenia, powierzchni jest nieskończenie wiele (ściślej: przeliczalnie wiele, tj. tyle, ile liczb naturalnych) i stanowią one wdzięczny przedmiot analiz i badań. Na powierzchniach występują ciekawe zjawiska, których nie ma wśród krzywych, np. nieorientowalność. Jeśli nasz żuk ma dwa zegarki i jeden z nich zostawia w domu, a z drugim chodzi na spacery, to może się zdarzyć, iż po powrocie zjeżą mu się z wrażenia czułki: zegarki chodzą w różne strony! Najprostszy przykład takiej powierzchni stanowi *płaszczyzna rzutowa*, która powstaje z krążka kołowego przez sklejenie każdej pary przeciwległych punktów na jego obwodzie. Sklejenie to nie daje się do końca wykonać w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, jeśli jednak ograniczymy się do paska *ABB'A'*, to otrzymamy wstęgę Möbiusa (która jest przykładem powierzchni z brzegiem, czego tu nie definiujemy), na której zjawisko nieorientowalności można łatwo zademonstrować posuwając się wzdłuż linii środkowej *CC'* (por. artykuł I. Grzegorczyk w następnym numerze).

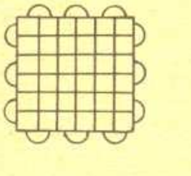




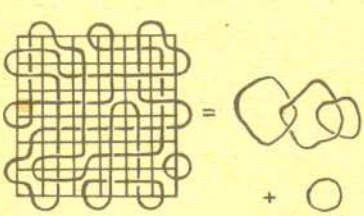


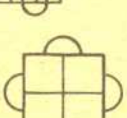


Sfera, torus i płaszczyzna rzutowa są powierzchniami najbardziej, w pewnym sensie, podstawowymi, można z nich bowiem otrzymać każdą inną z pomocą prostej operacji: wycinając w powierzchniach *M* i *N* okrągłe otwory i sklejając razem ich brzegi otrzymujemy powierzchnię *M* # *N* zwaną sumą spójną powierzchni *M* i *N*. Rysunek obok pokazuje sumę spójną dwóch torusów, a twierdzenie klasyfikacyjne mówi, że każda powierzchnia jest topologicznie identyczna bądź ze sferą, bądź z sumą spójną torusów, bądź z sumą spójną płaszczyzn rzutowych. Twierdzenie nie jest banalne: z którą z wyliczonych powierzchni jest identyczna suma spójna torusa i płaszczyzny rzutowej? (por. artykuł J. Olędzkiego w następnym numerze Delty).
I tak doszliśmy do czasów zupełnie już nam współczesnych, co skłania do zakończenia tego przeglądu paru słowami komentarza o obecnych badaniach nad krzywymi i powierzchniami oraz roli tych badań we współczesnej matematyce. Wypowiadam tu pogląd bardzo osobisty, wydaje się jednak, że w zakresie krzywych geometria syntetyczna, geometria analityczna i geometria różniczkowa nie mają już wiele do dodania, a choć rozwija się jeszcze topologiczna teoria krzywych, to i ona ma prawdopodobnie największe dni za sobą. Żywe są jednak badania nad niektórymi szczególnymi rodzajami krzywych jak *grafy* i niektórymi szczególnymi rodzajami zagadnień jak *położenie*. Grafem nazywa się skończoną sumę łuków zlepionych końcami i poza nimi rozłącznych, a teoria grafów znalazła liczne i poważne zastosowania w wielu dziedzinach działalności ludzkiej. Na terenie tej teorii zostało w 1976 roku rozstrzygnięte głośne zagadnienie czterech barw (o malowaniu map na płaszczyźnie), stanowiące zresztą zaledwie wierzchołek góry lodowej wielu podobnych, ważnych i trudnych problemów. Najlepszą ilustrację zagadnienia położenia stanowią *węzły* i pytanie: kiedy dwa węzły są równoważne (jeden daje się przeprowadzić na drugi bez rozplątywania). Matematycznie węzeł jest krzywą zwykłą zamkniętą, tj. ,,gumowym" obrazem okręgu w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a dwa węzły są równoważne, gdy istnieje topologiczna transformacja przestrzeni na siebie, przy której jeden z nich przechodzi na drugi. W tym sensie koniczynka i węzeł ósemkowy (na rysunku obok) nie są równoważne. Podobnie jak teoria grafów, także teoria węzłów jest dziś w pełni rozkwitu, ale i ona wykracza poza ten artykuł. Nieco inna jest sytuacja powierzchni, stanowią one bowiem najniższą, ,,źródłową" warstwę rozmaitości, tj. takich przestrzeni (zwartych, spójnych, metryzowalnych), których każdy punkt ma otoczenie takie same (topologicznie) jak dowolny punkt przestrzeni euklidesowej ustalonego wymiaru *n* (zwanego wymiarem rozmaitości). Jak kiedyś krzywe, tak dziś rozmaitości znajdują się w samym centrum matematyki i wszystko wskazuje na to, że długo tam pozostaną.
Brząkanie czas kończyć. Trwało długo, a przecież dotknęliśmy tylko niektórych strun pomijając wiele innych. Pominęliśmy różne krzywe znane i ważne dla zastosowań jak *loksodroma* i *ortodroma*, krzywe balistyczne, trajektorie ciał niebieskich i ich osobliwości (bez ich znajomości niemożliwa by była eksploracja kosmosu), ciekawe krzywe w biologii, krzywe trygonometryczne i opartą na nich analizę harmoniczną zajmującą się badaniem zjawisk periodycznych, XIX-wieczną modę na krzywe i konstruowane podówczas rozmaite aparaty do ich rysowania (np. piękne ,,krzywe Lissajous"), krzywe jako granice łamanych (z wyjątkiem krzywej Peano), krzywe jako obwiednie, krzywe biegunowe, krzywe jednobieżne i wiele, wiele innych. Podobnie pominęliśmy także różne ciekawe zjawiska na powierzchniach jak *prostokreślność*, *jednostronność*, *zawęźlenie* (podobnie jak obraz topologiczny okręgu S^1 może być zawęźlony w R^3, tak obraz topologiczny sfery S^2 może być zawęźlony w R^4), punkty siodłowe i inne, a także bliższe omówienie wielu powierzchni szczególnych jak *butelka Kleina*, *katenoida* itp. Na to wszystko nie starczyło już czasu ni miejsca, bo matematyka to taki osobliwy skarbiec, że im więcej się zeń czerpie, tym więcej skarbów się odkrywa.



GRA





Planszę do naszej gry widzimy na rysunku poniżej. Tworzy ją kwadrat 6×6 z dorysowanymi z każdej strony trzema uchami.
Gracze wykonują ruchy na przemian, stawiając w poszczególnych kwadratach lub . Gdy plansza jest już zapełniona, powstaje rysunek, który możemy interpretować jako krzywą przestrzenną. Pierwszy z graczy stara się w ciągu gry, by była ona jak najbardziej ,,zawęźlona", wysiłki drugiego idą w kierunku jej ,,rozplątywania", tak, by przy końcu gry krzywa miała jak najmniej ,,skrzyżowań", a jak najwięcej niezawęźlonych pętli. Oto przykład w którym pierwszy z graczy dostał 4 punkty (za każde ze skrzyżowań), a drugi z graczy dostał 1 punkt za izolowaną pętlę. Po każdej partii powinna nastąpić zmiana ról graczy. Możemy wprowadzić oczywiście inne sposoby punktowania. W tę grę można grać nawet na szachownicy 2×2 (oczywiście nie za długo). Czy możecie znaleźć optymalne strategie dla graczy?